МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

И.В. Павлов, В.В. Шамраева, О.В. Назарько,
Н.А. Сайфутдинова, Н.В. Неумержицкая

МАТЕМАТИКА. СБОРНИК УСТАНОВОЧНЫХ ЛЕКЦИЙ ДЛЯ СТУДЕНТОВ ЗАОЧНОЙ ФОРМЫ ОБУЧЕНИЯ

Ростов-на-Дону
ДГТУ
2017

УДК 336.7(075.8)
С23

Рецензенты:

О.Е. Кудрявцев, доктор физико-математических наук, профессор (Ростовский филиал РТА, Ростов-на-Дону)

С.Б. Климентов, доктор физико-математических наук, профессор (ЮФУ, Ростов-на-Дону)

С23 Математика. Сборник установочных лекций для студентов заочной формы обучения: учебное пособие / составители И.В. Павлов, В.В. Шамраева, О.В. Назарько, Н.А. Сайфутдинова, Н.В. Неумержицкая; Донской гос. техн. ун-т. – Ростов-на-Дону: ДГТУ, 2017. – 140 с.
ISBN 978-5-7890-1276-5

Представлены установочные лекции по математике для студентов-заочников технических направлений подготовки (бакалавриат). Учебное пособие состоит из 6 разделов, отражающих основные требования к общему курсу дисциплины «МАТЕМАТИКА».

Предназначено для обучающихся по направлению подготовки 08.03.01 «Строительство» и специальностям подготовки 20.05.01 «Пожарная безопасность», 21.05.01 «Прикладная геодезия».

УДК 336.7(075.8)

ISBN 978-5-7890-1276-5

Предисловие

Изложены теоретический материал, а также способы решения типовых задач. Методика изложения направлена на то, чтобы помочь студенту овладеть основными математическими методами, сделать их понятными, научить свободно их применять.

Весь учебный материал разбит на 6 разделов, каждый из которых состоит из нескольких лекций (всего 22). В первых трех лекциях вводятся понятия матриц, определителей и векторов. Этот материал применяется к изучению прямых и плоскостей (лекции 3,4). В лекциях 5, 6 и 7 излагается техника дифференцирования и вычисления пределов. Далее изучаются неопределенные, определенные и двойные интегралы (лекции 8–12). В лекциях 13 и 14 рассматриваются обыкновенные дифференциальные уравнения 1-го и 2-го порядка. Лекции 15–22 содержат элементы теории вероятностей и математической статистики.

РАЗДЕЛ 1. ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

Лекция1

Матрицы и определители

Определение 1.Квадратной матрицей порядка n называется прямоугольная таблица, состоящая из n^2 чисел и имеющая вид:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}. \qquad (1)$$

В элементе a_{ij} матрицы A индекс i (соответственно, индекс j) обозначает номер строки (соответственно, номер колонны), в которой находится этот элемент.

■

Числовая иллюстрация. Рассмотрим матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 8 & 10 \\ -2 & 4 & 6 & 11 \\ -10 & -8 & -3 & 2 \\ -4 & 3 & 12 & 17 \end{pmatrix}.$$

Здесь $n = 4, a_{11} = 3,\ a_{13} = 8,\ a_{24} = 11,\ a_{43} = 12.$

Определение 2:

1. Определителем $|A|$ матрицы A первого порядка называется единственный элемент, из которого эта матрица состоит, т.е. для $A = (a_{11})$ получаем $|A| = a_{11}$.

2. Определителем матрицы A порядка $n = 2$ называется число

$$|A| := \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \qquad (2)$$

3. Определителем матрицы A порядка $n = 3$ называется число

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}. \tag{3}$$

■

Пример 1. Пусть $A=\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$.

Тогда $|A|=4\cdot 5-3\cdot(-2)=20+6=26$.

Пример 2. Пусть $A=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \\ -1 & 4 & 8 \end{pmatrix}$.

Тогда $|A|=2\begin{vmatrix} 6 & 7 \\ 4 & 8 \end{vmatrix}-(-3)\begin{vmatrix} 5 & 7 \\ -1 & 8 \end{vmatrix}+4\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}=2\cdot 20+3\cdot 47+4\cdot 26=285$.

Определение3. Поставим в соответствие матрице A, заданной формулой (1), матрицу A^T, чьи колонны совпадают с соответствующими строками матрицы A. Матрица A^T называется *транспонированной матрицей* (по отношению к A).

■

Пример 3. Если $A=\begin{pmatrix} 3 & -5 & -8 \\ 1 & 9 & -2 \\ 4 & 7 & 10 \end{pmatrix}$, тогда $A^T=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ -5 & 9 & 7 \\ -8 & -2 & 10 \end{pmatrix}$.

Действия над матрицами

Обобщим определение 1.

Определение 4. Матрицей размера $m\times n$ называется прямоугольная таблица чисел, состоящая из m строк и n колонн:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}. \tag{4}$$

В дальнейшем для краткости мы будем обозначать матрицы так: $A=(a_{ij})$.Множество всех матриц размера $m\times n$ обозначимM$_{m,n}$.

■

Определение 5. Две матрицы $A=(a_{ij})$ и $B=(b_{ij})$ называются *равными*, если они имеют одинаковый размер и $a_{ij}=b_{ij}\ (i=1,2,...,m;\ j=1,2,...,n)$.

■

Определение 6. Матрица, все элементы которой равны нулю, называется *нулевой* матрицей и обозначается 0.

■

Определение 7. Если $A=(a_{ij})$ и $B=(b_{ij})$– две матрицы размера $m\times n$, а α – число, то сумма матриц и произведение матрицы на число определяются следующим образом:

$$A+B:=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & ... & a_{1n}+b_{1n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & ... & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}, \qquad \alpha\cdot A:=\begin{pmatrix} \alpha\cdot a_{11} & \alpha\cdot a_{12} & ... & \alpha\cdot a_{1n} \\ ... & ... & ... & ... \\ \alpha\cdot a_{m1} & \alpha\cdot a_{m2} & ... & \alpha\cdot a_{mn} \end{pmatrix}.$$

■

*Пример 4.*Даны матрицы:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \\ -3 & 7 & 1 \\ 3 & 4 & -2 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} -5 & -2 & 1 \\ -6 & 0 & 2 \\ 4 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$ Найти $3A-2B^T$.

$$3A=\begin{pmatrix} 6 & -4 & 3 \\ -9 & 21 & 3 \\ 9 & 12 & -6 \end{pmatrix},\ B^T=\begin{pmatrix} -5 & -6 & 4 \\ -2 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix},\ 3A-2B^T=\begin{pmatrix} 11 & 2 & -1 \\ -7 & 21 & 4 \\ 8 & 10 & -9 \end{pmatrix}.$$

Можно определить операцию произведения матриц. Для этого вводятся ещё несколько определений.

Определение 8. Матрица A размера $1\times p$ называется вектор-строкой:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1p} \end{pmatrix}.$$

Матрица B размера $p\times 1$ называется вектор-столбцом:

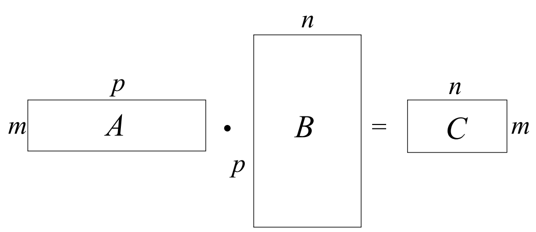
$$B = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \dots \\ b_{p1} \end{pmatrix}.$$

Для этих матриц A и B произведение $A \cdot B$ определяется следующим образом:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \dots \\ b_{p1} \end{pmatrix} := a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \dots + a_{1p}b_{p1} = \sum_{k=1}^{p} a_{1k}b_{k1}.$$

■

Главное в определении произведения произвольных матриц A и B это то, что строки матрицы A умножаются (в смысле определения 8) на столбцы матрицы B. Поэтому произведение матриц определено только тогда, когда число столбцов матрицы A совпадает с числом строк матрицы B. Лучше всего это видно на схеме умножения матриц:



<u>*Определение 9.*</u> Произведением $A \cdot B$ матрицы $A = (a_{ij})$ размера $m \times p$ на матрицу $B = (b_{ij})$ размера $p \times n$ называется матрица $C = (c_{ij})$ размера $m \times n$, где

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{ip}b_{pj} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj} \tag{5}$$

$(i = 1,2,\dots,m;\ j = 1,2,\dots,n)$.

Заметим, что равенство (5) – произведение i-й строки матрицы A на j-й столбец матрицы B.

■

*Пример 5.*Даны матрицы:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 4 & 0 & 2\end{pmatrix};B=\begin{pmatrix}3 & -4 & 5 & 2\\ 1 & 5 & 1 & -7\\ -2 & 2 & 0 & 1\end{pmatrix};\ C=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 3\end{pmatrix};\ D=\begin{pmatrix}-5 & 1\\ 2 & -3\end{pmatrix}.$$

Найти, если это возможно, следующие произведения матриц:

$A\cdot B,\ A\cdot B^T,A\cdot C,\ C^T\cdot B,\ D\cdot C,\ D\cdot A.$

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 4 & 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & -4 & 5 & 2\\ 1 & 5 & 1 & -7\\ -2 & 2 & 0 & 1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1\cdot3+2\cdot1+1\cdot(-2) & 1\cdot(-4)+2\cdot5+1\cdot2 & 1\cdot5+2\cdot1+1\cdot0 & 1\cdot2+2\cdot(-7)+1\cdot1\\ 4\cdot3+0\cdot1+2\cdot(-2) & 4\cdot(-4)+0\cdot5+2\cdot2 & 4\cdot5+0\cdot1+2\cdot0 & 4\cdot2+0\cdot(-7)+2\cdot1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}3 & 8 & 7 & -11\\ 8 & -12 & 20 & 10\end{pmatrix};$$

произведение $A\cdot B^T$ неопределено, так как число столбцов первого сомножителя не совпадает с числом строквторого сомножителя;

$$A\cdot C=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 4 & 0 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\ 10\end{pmatrix};$$

$$C^T\cdot B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & -4 & 5 & 2\\ 1 & 5 & 1 & -7\\ -2 & 2 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 12 & 7 & -9\end{pmatrix};$$

произведение $D\cdot C$ неопределено, так как число столбцов первого сомножителя не совпадает с числом строк второго сомножителя;

$$D\cdot A=\begin{pmatrix}-5 & 1\\ 2 & -3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 4 & 0 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & -10 & -3\\ -10 & 4 & -4\end{pmatrix}.$$

Обратные матрицы

*Определение 10.*Единичной матрицейиз$M_{n,n}$ называют матрицу $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ & & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$.

■

Определение 11. Пусть $A \in M_{n,n}$. Матрица $B \in M_{n,n}$ называется обратной по отношению к матрицеA, если$A \cdot B = B \cdot A = I$.Обратная матрица обозначается следующим образом: $B := A^{-1}$.

■

*Пример 6.*Пусть$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 6 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Равенство $A \cdot B = B \cdot A = I$ проверяется непосредственно. Следовательно, $B = A^{-1}$.

Каков же рецепт нахождения обратной матрицы? Его даёт ряд определений и нижеследующая теорема.

Определение 12. Пусть $A \in M_{n,n}$. Число $a_{ij}^* = (-1)^{i+j}|A_{ij}|$ называется *алгебраическим дополнением элемента*a_{ij} матрицы A, а матрица $A^* = (a_{ij}^*)$ называется *матрицей алгебраических дополнений матрицы* A.

■

*Пример 7.*Найдем матрицу A^* алгебраических дополнений матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Имеем:

$$a_{11}^* = (-1)^2|A_{11}| = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 3; \qquad a_{12}^* = (-1)^3|A_{12}| = -\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 4; \quad a_{13}^* = (-1)^4|A_{13}| = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 6;$$

$$a_{21}^* = (-1)^3|A_{21}| = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = -11; \quad a_{22}^* = (-1)^4|A_{22}| = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -5; \qquad a_{23}^* = (-1)^5|A_{23}| = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 7;$$

$$a_{31}^* = (-1)^4|A_{31}| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2; \qquad a_{32}^* = (-1)^5|A_{32}| = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -7; \qquad a_{33}^* = (-1)^6|A_{33}| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 4.$$

Таким образом,

$$A^* = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 6 \\ -11 & -5 & 7 \\ 2 & -7 & 4 \end{pmatrix}.$$

Определение 13. Транспонированная матрица алгебраических дополнений матрицы A обозначается $\left(A^*\right)^T$ и называется *присоединенной матрицей к матрице* A.

■

Теорема 1. 1) Если $|A| \neq 0$, то обратная к A матрица существует и имеет вид:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\left(A^*\right)^T. \tag{6}$$

2) Если $|A| = 0$, то A^{-1} не существует.

■

Пример 8. Пусть A – та же матрица, что и в примере 7, в котором подсчитано, что $A^* = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 6 \\ -11 & -5 & 7 \\ 2 & -7 & 4 \end{pmatrix}$. Тогда $\left(A^*\right)^T = \begin{pmatrix} 3 & -11 & 2 \\ 4 & -5 & -7 \\ 6 & 7 & 4 \end{pmatrix}$. Вычисляя определитель матрицы A, получаем $|A| = 29$. Теперь по формуле (6):

$$A^{-1} = \frac{1}{29}\left(A^*\right)^T = \begin{pmatrix} \frac{3}{29} & -\frac{11}{29} & \frac{2}{29} \\ \frac{4}{29} & -\frac{5}{29} & -\frac{7}{29} \\ \frac{6}{29} & \frac{7}{29} & \frac{4}{29} \end{pmatrix}.$$

Лекция 2

Системы линейных алгебраических уравнений

Формулы Крамера

Рассмотрим следующую систему трех линейных уравнений с тремя неизвестными x_1, x_2, x_3:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2; \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases} \tag{7}$$

Эту систему можно записать в матричном виде $A \cdot x = b$, где $A = \left(a_{ij}\right)$– матрица коэффициентов при неизвестных, $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ – столбец свободных членов и $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ – столбец неизвестных. Обозначим $\Delta = |A|$ – главный определитель системы, а также введем вспомогательные определители: $\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$; $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}$; $\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$.

Теорема 2 (правило Крамера). Если $\Delta \neq 0$, то система (7) обладает единственным решением, которое имеет вид: $x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}$.

■

Рассмотрим пример.

Пример 9. Решить следующую систему по формулам Крамера:

$$\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 4; \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 5; \\ 2x_1 - x_2 + 7x_3 = 7. \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 3 & -5 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 7 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 7 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} - 5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 3(7+2) - 3(7-4) - 5(-1-2) = 33;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 4 & 3 & -5 \\ 5 & 1 & 2 \\ 7 & -1 & 7 \end{vmatrix} = 4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 7 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 7 \end{vmatrix} - 5 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 7 & -1 \end{vmatrix} = 4(7+2) - 3(35-14) - 5(-5-7) = 33;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 1 & 5 & 2 \\ 2 & 7 & 7 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 7 \end{vmatrix} - 4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} - 5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = 3(35-14) - 4(7-4) - 5(7-10) = 66;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & 7 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 7 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} + 4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 3(7+5) - 3(7-10) + 4(-1-2) = 33.$$

Тогда, по формулам Крамера получим:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{33}{33}; \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{66}{33}; \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{33}{33} = 1.$$

Матричный метод решения СЛАУ

Систему линейных алгебраических уравнений можно также решать матричным методом, который основан на том, что система (7) может быть записана в матричной форме: $A \cdot x = b$. Тогда, если $\Delta \neq 0$, система (7) имеет единственное решение и его можно найти по формуле:

$$x = A^{-1} \cdot b. \tag{8}$$

Пример 10. Решить следующую систему матричным методом:

$$\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 4; \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 5; \\ 2x_1 - x_2 + 7x_3 = 7. \end{cases}$$

Так как $\Delta = 33 \neq 0$, то существует матрица, обратная к A – матрице коэффициентов системы. Найдём алгебраические дополнения к элементам матрицы:

$$a_{11}^* = (-1)^2 |A_{11}| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 7 \end{vmatrix} = 9; \qquad a_{12}^* = (-1)^3 |A_{12}| = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = -3; \qquad a_{13}^* = (-1)^4 |A_{13}| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3;$$

$$a_{21}^* = (-1)^3 |A_{21}| = -\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 7 \end{vmatrix} = -16; \quad a_{22}^* = (-1)^4 |A_{22}| = \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = 31; \qquad a_{23}^* = (-1)^5 |A_{23}| = -\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 9;$$

$$a_{31}^* = (-1)^4 |A_{31}| = \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 11; \qquad a_{32}^* = (-1)^5 |A_{32}| = -\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -11; \quad a_{33}^* = (-1)^6 |A_{33}| = \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Составим матрицу, присоединённую к матрице A:

$$A^* = \begin{pmatrix} 9 & -3 & -3 \\ -16 & 31 & 9 \\ 11 & -11 & 0 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 9 & -16 & 11 \\ -3 & 31 & -11 \\ -3 & 9 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда матрица, обратная к A, имеет вид:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^* = \frac{1}{33} \begin{pmatrix} 9 & -16 & 11 \\ -3 & 31 & -11 \\ -3 & 9 & 0 \end{pmatrix}.$$

По формуле (8) имеем:

$$x = \frac{1}{33} \begin{pmatrix} 9 & -16 & 11 \\ -3 & 31 & -11 \\ -3 & 9 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} = \frac{1}{33} \begin{pmatrix} 9 \cdot 4 - 16 \cdot 5 + 11 \cdot 7 \\ -3 \cdot 4 + 31 \cdot 5 - 11 \cdot 7 \\ -3 \cdot 4 + 9 \cdot 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{33} \begin{pmatrix} 33 \\ 66 \\ 33 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

т.е. исходная система имеет решение: $x_1 = 1;\ x_2 = 2;\ x_3 = 1$.

Пример 11. Решить следующую систему: $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - 4x_3 = 5; \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 3; \\ -7x_2 - 2x_3 = -1. \end{cases}$.

Вычислим главный определитель:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 & -4 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -7 & -2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -7 & -2 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -7 \end{vmatrix} = 2(-4-7) + 3(-2) - 4(-7) = 0.$$

Заметим,что система, у которой главный определитель равен 0, не может быть решена по формулам Крамера или матричным методом. Оказывается, что и остальные определители тоже равны нулю, т.е. $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 0.$ Легко видеть, чтов этом случае исходная система уравнений имеет бесчисленное множество решений.

Ещё одну ситуацию проиллюстрируем на следующем примере.

Пример 12. Решить следующую систему: $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - 4x_3 = 5 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 3 \\ -7x_2 - 2x_3 = 8 \end{cases}$.

Для данной системы $\Delta = 0$, но при этом $\Delta_1 = 99 \neq 0.$ Это означает,что данная система уравнений решений не имеет.

Рассмотренные методы решения систем линейных алгебраических уравнений могут быть применены не только к решению систем трёх уравнений с тремя неизвестными.

Пример 13. Решить следующую систему: $\begin{cases} -5x + 3y = -2 \\ 4x - 2y = 2 \end{cases}$

Найдём главный определитель системы: $\Delta = \begin{vmatrix} -5 & 3 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = 10 - 12 = -2$.

При этом: $\Delta_1 = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 4 - 6 = -2;\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} -5 & -2 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -10 + 8 = -2$.

Тогда решение системы имеет вид: $x = \dfrac{\Delta_1}{\Delta} = \dfrac{-2}{-2} = 1;\ y = \dfrac{\Delta_2}{\Delta} = \dfrac{-2}{-2} = 1.$

Лекция 3

Векторы и операции над ними

Основные понятия

Обозначим через R^n множество, элементами которого являются упорядоченные наборы из n чисел, т.е. $\overline{a} = (a_1, a_2, ..., a_n)^T$. Элементы R^n называют векторами.Ясно, что их можно трактовать как элементы пространства $M_{n,1}$.Поэтому определены операции суммы двух векторов или произведения вектора на число $\alpha \in R$ (определение 7).

Определение 14. Линейной комбинацией векторов $\overline{a}^1, \overline{a}^2, ..., \overline{a}^n$ с коэффициентами $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ называется вектор $\overline{b} = \alpha_1 \overline{a}^1 + \alpha_2 \overline{a}^2 + ... + \alpha_n \overline{a}^n$.

■

Пример 14. Найти линейную комбинацию векторов $\overline{a} = (1, 2, -1, 3)^T$, $\overline{b} = (-1, 3, 0, 8)^T$, $\overline{c} = (7, 5, -3, 0)^T$ с коэффициентами $\alpha = 3$, $\beta = 4$, $\gamma = -2$:

$$\alpha \overline{a} + \beta \overline{b} + \gamma \overline{c} = 3\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15 \\ 8 \\ 3 \\ 41 \end{pmatrix}.$$

Определение 15. Система векторов $\{\overline{a}^{(1)}, \overline{a}^{(2)}, ..., \overline{a}^{(m)}\} \subset R^n$ называется *линейно независимой*, если из соотношения $\alpha_1 \overline{a}^{(1)} + \alpha_2 \overline{a}^{(2)} + ... + \alpha_m \overline{a}^{(m)} = \overline{o}$ вытекает равенство $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_m = 0$. В противном случае данная система называется *линейно зависимой* (т.е. исходная система линейно зависима, если существуют m чисел $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$, неравные одновременно нулю и такие, что $\alpha_1 \overline{a}^{(1)} + \alpha_2 \overline{a}^{(2)} + ... + \alpha_m \overline{a}^{(m)} = \overline{o}$).

■

Теорема 3. Пусть в пространстве R^n задана система n векторов

$$\overline{a}^{(1)} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{n1} \end{pmatrix}, \ \overline{a}^{(2)} = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{n2} \end{pmatrix}, ..., \overline{a}^{(n)} = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \dots \\ a_{nn} \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Эта система линейно независима тогда и только тогда, когда

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0. \tag{10}$$

■

Определение 16. Система векторов (9) образует *базис* в пространстве R^n, если она линейно независима и любой вектор из R^n можно единственным образом представить в виде линейной комбинации векторов системы.

■

Определение 17. Коэффициенты $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ разложения вектора $\bar{b}$ по базису $\{\bar{a}^{(1)}, \bar{a}^{(2)}, ..., \bar{a}^{(n)}\} \subset R^n$ называются координатами вектора $\bar{b}$ относительно данного базиса.

■

Пример 15. Векторы

$$\bar{e}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix}, \ \bar{e}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix}, ..., \bar{e}^{(n)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ ... \\ 1 \end{pmatrix}$$

образуют базис в пространстве R^n, так как

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Этот базис называется естественным базисом в пространстве R^n. Если $\bar{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_n \end{pmatrix}$,

то легко видеть, что $\bar{b} = b_1\bar{e}^{(1)} + b_2\bar{e}^{(2)} + ... + b_n\bar{e}^{(n)}$, т.е. элементы $b_1, b_2, ..., b_n$ как раз и являются координатами вектора $\bar{b}$ относительно естественного базиса.

В пространстве R^3 векторы естественного базиса чаще всего обозначаются так:

$$\bar{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \bar{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \bar{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Пример 16. Доказать, что система векторов

$$\overline{a}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \overline{a}^{(2)} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \overline{a}^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

образует базис в пространстве R^3 и найти разложение вектора $\overline{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ в этом базисе.

Имеем:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 5 \neq 0 .$$

По теореме 3 система векторов $\{\overline{a}^{(1)}, \overline{a}^{(2)}, \overline{a}^{(3)}\}$образует базис в пространстве R^3. Для нахождения координат вектора $\overline{b}$ относительно этого базиса составим систему:

$$\begin{cases} \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 = 6 \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 3. \\ \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 = 5 \end{cases}$$

Решим ее по правилу Крамера. Вычислим вспомогательные определители:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 6 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 5, \ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 2 \end{vmatrix} = -10, \ \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 6 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 15.$$

Получаем: $\alpha_1 = 1, \ \alpha_2 = -2, \ \alpha_3 = 3.$ Т.е., $\overline{b} = \overline{a}^{(1)} - 2\overline{a}^{(2)} + 3\overline{a}^{(3)}.$

Скалярное произведение векторов

Определение 18.*Скалярным произведением* векторов $\overline{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix}$ и $\overline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$ называется число $\overline{a} \cdot \overline{b} := \sum_{k=1}^{n} a_k b_k = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n$, т.е.сумма произведений одноименных координат векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$.

■

Остальные определения мы рассмотрим только для пространств R^3 и R^2.

*Теорема 4.*Пусть $\overline{a}$ и $\overline{b}$ – ненулевые направленные отрезки (векторы) в пространстве R^3(или в R^2), $|\overline{a}|$ и $|\overline{b}|$ – их длины, а φ – угол между $\overline{a}$ и $\overline{b}$ $(0 \le \varphi \le \pi)$. Тогда:

1) $|\overline{a}| = \sqrt{\overline{a} \cdot \overline{a}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$;

2) $\cos\varphi = \dfrac{\overline{a} \cdot \overline{b}}{|\overline{a}| \cdot |\overline{b}|}$.

■

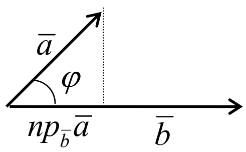
Определение 19. Проекцией вектора $\overline{a} \in R^3$ на ненулевой вектор $\overline{b} \in R^3$ называется число

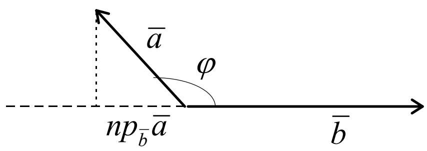
$$np_{\overline{b}}\,\overline{a} = \|\overline{a}\| \cdot \cos\varphi,$$

где φ – угол между векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$.

■

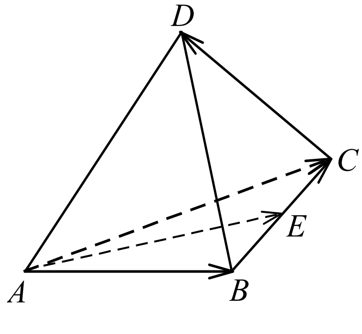
Нижеследующие рисунки иллюстрируют понятие проекции:





Заметим, что если угол φ тупой, то проекция вектора на вектор есть отрицательное число.

Пример 17. Даны вершины пирамиды $A(3,5,4)$, $B(8,7,4)$, $C(5,10,4)$, $D(4,7,8)$. Найти длины ребер AB и CD, угол $\angle ABC$, проекцию вектора $\overline{AB}$ на вектор $\overline{CD}$, а также координаты точки E, являющейся серединой ребра BC.



Прежде всего найдем координаты нужных нам векторов: $\overline{AB} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overline{BC} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overline{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overline{CD} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Длины ребер AB и CD – это нормы (длины) соответствующих векторов, т.е. по формуле 1) из теоремы 4 имеем: $\|\overline{AB}\| = \sqrt{5^2 + 2^2 + 0^2} = \sqrt{29}$, $\|\overline{CD}\| = \sqrt{(-1)^2 + (-3)^2 + 4^2} = \sqrt{26}$.

Угол $\varphi = \angle ABC$ – это угол между вектором $\overline{BA} = -\overline{AB} = \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ и вектором $\overline{BC}$, поэтому по формуле 2) из теоремы 4 получаем:

$$\cos\varphi = \frac{\overline{BA}\cdot\overline{BC}}{\|\overline{BA}\|\cdot\|\overline{BC}\|} = \frac{(-5)\cdot(-3)+(-2)\cdot 3+0\cdot 0}{\sqrt{29}\cdot\sqrt{(-3)^2+3^2+0^2}} = \frac{9}{\sqrt{29}\cdot\sqrt{18}} = \frac{3}{\sqrt{58}}.$$

Следовательно, $\varphi = \arccos\frac{3}{\sqrt{58}}$.

Ясно, что $np_{\overline{CD}}\overline{AB} = \frac{\overline{AB}\cdot\overline{CD}}{\|\overline{CD}\|} = \frac{-11}{\sqrt{26}}$. Найдем $\overline{AE}$. Пусть $E = E(x,y,z)$. Тогда $\overline{AE} = \begin{pmatrix} x-3 \\ y-5 \\ z-4 \end{pmatrix}$. Так как Eделит отрезок BC пополам, то $\overline{EC} = \frac{1}{2}\cdot\overline{BC} = \begin{pmatrix} -1{,}5 \\ 1{,}5 \\ 0 \end{pmatrix}$. По правилу сложения векторов $\overline{AC} = \overline{AE} + \overline{EC} \Rightarrow \overline{AE} = \overline{AC} - \overline{EC} \Rightarrow \begin{pmatrix} x-3 \\ y-5 \\ z-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3{,}5 \\ 3{,}5 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\begin{cases} x = 6{,}5 \\ y = 8{,}5 \\ z = 4 \end{cases}$. Итак, точка Eимеет координаты (6,5;8,5;4).

Определение 20. Вектора $\overline{a}$ и $\overline{b}$ из R^3 называются ортогональными, если $\overline{a}\cdot\overline{b} = 0$.

■

Пример 18. При каком значении параметра t векторы $\overline{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ t \\ 6 \end{pmatrix}$ и $\overline{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix}$ ортогональны?

Имеем: $\overline{a}\cdot\overline{b} = 0 \Leftrightarrow 6+35-2t+48=0 \Leftrightarrow 2t=89 \Leftrightarrow t=44{,}5$.

Векторное произведение векторов в R^3

<u>*Определение 21.*</u> Векторным произведением векторов $\bar{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ и $\bar{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$

называется вектор, обозначаемый $\bar{a} \times \bar{b}$ и вычисляемый по формуле:

$$\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & a_1 & b_1 \\ \bar{j} & a_2 & b_2 \\ \bar{k} & a_3 & b_3 \end{vmatrix}. \tag{11}$$

■

Заметим, что в первом столбце определителя, входящего в равенство (11), стоят не числа, а векторы.

Пример 19. Пусть $\bar{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\bar{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$. Используя (11), имеем:

$$\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & 5 & 4 \\ \bar{j} & -3 & 3 \\ \bar{k} & 2 & -1 \end{vmatrix} = \bar{i}\begin{vmatrix} -3 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} - \bar{j}\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + \bar{k}\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ -3 & 3 \end{vmatrix} = -3\bar{i} + 13\bar{j} + 27\bar{k} = \begin{pmatrix} -3 \\ 13 \\ 27 \end{pmatrix}.$$

Теорема 5.Векторное произведение $\bar{a} \times \bar{b}$ есть вектор, удовлетворяющий следующим условиям:

1) норма этого вектора равна площади параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$ как на сторонах;

2) вектор $\bar{a} \times \bar{b}$ ортогонален и вектору $\bar{a}$, и вектору $\bar{b}$;

3) направление вектора $\bar{a} \times \bar{b}$ определяется по правилу буравчика: если лезвие буравчика установить перпендикулярно плоскости, в которой лежат вектора $\bar{a}$ и $\bar{b}$, а ручку буравчика вращать от вектора $\bar{a}$ к вектору $\bar{b}$ в сторону наименьшего угла между этими векторами, то направление вектора $\bar{a} \times \bar{b}$ совпадет с направлением движения лезвия буравчика.

■

Пример 20. Пусть дана пирамида, вершины которой имеют те же координаты, что и в примере 17 (см. также рисунок из этого примера). Требуется найти $S_{\Delta ABC}$ и $S_{\Delta BCD}$.

Положим $\bar{a} = \overline{AB}$, $\bar{b} = \overline{AC}$. Вычисляем векторное произведение:

$$\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & 5 & 2 \\ \bar{j} & 2 & 5 \\ \bar{k} & 0 & 0 \end{vmatrix} = 21\bar{k} \Rightarrow S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\left\|\bar{a} \times \bar{b}\right\| = \frac{1}{2}\left\|21\bar{k}\right\| = \frac{21}{2}\left\|\bar{k}\right\| = 10{,}5.$$

Аналогично, полагая $\bar{c} = \overline{CB} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\bar{d} = \overline{CD} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$, получаем:

$$\bar{c} \times \bar{d} = \begin{vmatrix} \bar{i} & 3 & -1 \\ \bar{j} & -3 & -3 \\ \bar{k} & 0 & 4 \end{vmatrix} = -12\bar{i} - 12\bar{j} - 12\bar{k} = \begin{pmatrix} -12 \\ -12 \\ -12 \end{pmatrix} \Rightarrow S_{\Delta BCD} = \frac{1}{2}\left\|\bar{c} \times \bar{d}\right\| =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{(-12)^2 + (-12)^2 + (-12)^2} = 6\sqrt{3}.$$

Смешанное произведение векторов в R^3

Определение 22.Смешанным произведением трех векторов $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in R^3$ называется число, обозначаемое $\bar{a}\bar{b}\bar{c}$ и вычисляемое по формуле:

$$\bar{a}\bar{b}\bar{c} = \bar{a}\left(\bar{b} \times \bar{c}\right). \tag{12}$$

■

Заметим, что при применении формулы (12) сначала нужно вычислить векторное произведение векторов, стоящее в круглых скобках, а затем результат скалярно умножить на вектор $\bar{a}$.

*Теорема 6.*Если $\bar{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \bar{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \bar{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$, то смешанное произведение этих векторов вычисляется по формуле:

$$\overline{a}\overline{b}\overline{c}=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \qquad (13)$$

■

Пример 21. Пусть $\overline{a}=\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix}$, $\overline{b}=\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}$, $\overline{c}=\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$. Найдем $\overline{a}\overline{b}\overline{c}$, используя формулу (13):

$$\overline{a}\overline{b}\overline{c}=\begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}=(-1)\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}-2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}+2\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}=-3.$$

Выясним теперь геометрический смысл смешанного произведения.

Теорема 7. Модуль смешанного произведения векторов $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$ равен объему параллелепипеда, построенного на этих векторах как на сторонах.

■

Пример 22. Пусть вектора $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$ те же, что и в предыдущемпримере. Найдем объем V параллелепипеда, построенного на векторах $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$ как на сторонах.

Воспользовавшись теоремой 7 и вычислениями из примера 21, получаем: $V=\left|\overline{a}\overline{b}\overline{c}\right|=|-3|=3$.

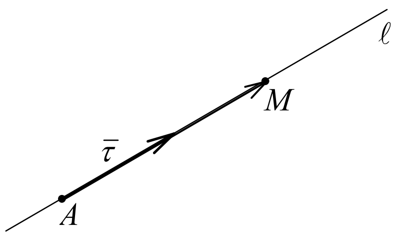
Пример 23. Пусть дана пирамида из примеров 17 и 20. Найти объем V этой пирамиды, а также ее высоту h, опущенную из вершины D на основание ABC. Так как $\overline{a}=\overline{AB}=\begin{pmatrix}5\\2\\0\end{pmatrix}$, $\overline{b}=\overline{AC}=\begin{pmatrix}2\\5\\0\end{pmatrix}$, $\overline{c}=\overline{AD}=\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}$, а объем пирамиды (как это следует из элементарных геометрических соображений) в шесть раз меньше объема соответствующего параллелепипеда, то

$$\overline{a}\overline{b}\overline{c}=\begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}=100-16=84,$$

и по теореме 7 $V=\frac{1}{6}\left|\bar{a}\bar{b}\bar{c}\right|=\frac{84}{6}=14.$ Далее, поскольку $V=\frac{1}{3}S_{\Delta ABC}\cdot h$, то применяя результат вычисления $S_{\Delta ABC}$ из примера 20, получаем: $h=\frac{3V}{S_{\Delta ABC}}=\frac{42}{10{,}5}=4.$

Лекция 4
Прямая и плоскость

Параметрические уравнения прямой в R^3



Пусть точка $A(a_1, a_2, a_3)$ принадлежит прямой ℓ и ненулевой вектор $\bar{\tau}=\begin{pmatrix}\tau_1\\ \tau_2\\ \tau_3\end{pmatrix}$ лежит на прямой ℓ. Тогда можно составить систему уравнений

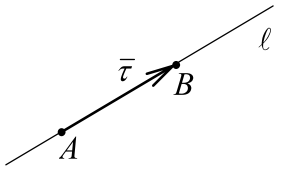
$$\ell:\ \boxed{\begin{cases} x=\tau_1 t+a_1;\\ y=\tau_2 t+a_2;\\ z=\tau_3 t+a_3,\ t\in R,\end{cases}} \tag{14}$$

котораяназывается***параметрическими уравнениями прямой в*** R^3 ***по точке*** A ***и вектору*** $\bar{\tau}$. Число t является в уравнениях (14) параметром, могущим принимать любое действительное значение. Вектор $\bar{\tau}$ (как и любой вектор, параллельный прямой ℓ) называют ***направляющим вектором прямой*** ℓ.

Пример 24. Запишем уравнения прямой ℓ, проходящей через точку $A(3,-5,7)$ и вектор $\bar{\tau}=\begin{pmatrix}-2\\ 8\\ -4\end{pmatrix}$. Подставив имеющиеся данные в уравнение (14), получим:

$$\ell:\ \begin{cases} x=-2t+3;\\ y=8t-5;\\ z=-4t+7,\ t\in R.\end{cases} \qquad . \tag{15}$$

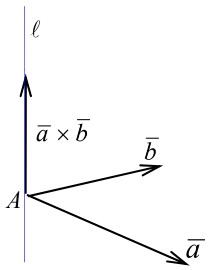
*Пример 25.*Записать уравнения прямой, проходящей через точки $A(7,-2,3)$ и $B(4,9,-1)$.



Ясно, что направляющий вектор для ℓ можно задать так:

$$\bar{\tau} = \overline{AB} = \begin{pmatrix} -3 \\ 11 \\ -4 \end{pmatrix} \Rightarrow \ell : \begin{cases} x = -3t + 7; \\ y = 11t - 2; \\ z = -4t + 3,\ t \in R. \end{cases}.$$

Пример 26. Записать уравнение прямой, проходящей через точку $A(6,-5,3)$ перпендикулярно векторам $\bar{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ и $\bar{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}$.

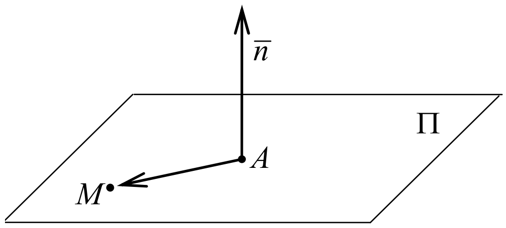


Принимая во внимание теорему 5, направляющий вектор для ℓ можно вычислить следующим образом:

$$\bar{\tau} = \bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & 1 & 2 \\ \bar{j} & -1 & 3 \\ \bar{k} & 3 & -5 \end{vmatrix} = -4\bar{i} + 11\bar{j} + 5\bar{k} = \begin{pmatrix} -4 \\ 11 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, $\ell : \begin{cases} x = -4t + 6; \\ y = 11t - 5; \\ z = 5t + 3,\ t \in R. \end{cases}.$

Уравнение плоскости по точке и нормальному вектору



Пусть дана точка $A(a_1, a_2, a_3)$, принадлежащая плоскости Π, и ненулевой вектор $\bar{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$, ортогональный этой плоскости.

Составим уравнение плоскости.Для этого рассмотрим на плоскости Π "текущую" точку $M(x, y, z)$ с переменными координатами x, y и z. Наложим на переменные x, y и z условие, которое, с одной стороны, даст возможность точке M попасть в любую точку плоскости Πи, с другой — не позволит точке M выйти за пределы этой плоскости. Полученное соотношение и будет представлять собой уравнения плоскости Π. Имеем цепочку равносильностей:

$$M \in \Pi \iff \overline{n} \perp \overline{AM} \iff \overline{n} \cdot \overline{AM} = 0 \iff n_1(x - a_1) + n_2(y - a_2) + n_3(z - a_3) = 0.$$

Уравнение

$$n_1(x-a_1)+n_2(y-a_2)+n_3(z-a_3)=0 \qquad (16)$$

называется ***уравнением плоскости по точке*** A ***и нормальному вектору*** $\overline{n}$ (термины "нормальный вектор", "ортогональный вектор", "перпендикулярный вектор" означают одно и то же). Если в полученном уравнении провести обычные алгебраические преобразования (раскрытие скобок и приведение подобных), то получим уравнение вида:

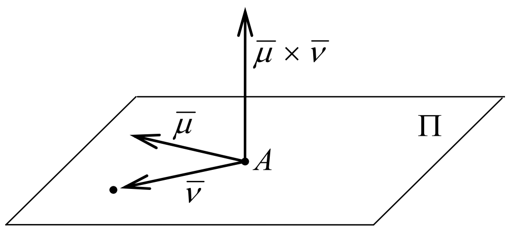
$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

которое называют ***общим уравнением плоскости***.

Пример 27. Запишем уравнение плоскости, проходящей через точку $A(-5,8,2)$ и имеющей нормальный вектор $\overline{n} = \begin{pmatrix} 9 \\ -6 \\ 13 \end{pmatrix}$. По формуле (16) имеем:

$$9(x+5)-6(y-8)+13(z-2)=0 \Leftrightarrow 9x-6y+13z+67=0.$$

Уравнение плоскости по точке и двум векторам



Пусть дана точка $A(a_1, a_2, a_3)$, принадлежащая плоскости Π, и два линейно независимых (неколлинеарных) вектора $\overline{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \end{pmatrix}$ и $\overline{\nu} = \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \end{pmatrix}$, лежащих в этой плоскости. Составим её уравнение.

Очевидно, в качестве нормального вектора можно выбрать вектор $\overline{n} = \overline{\mu} \times \overline{\nu}$. Взяв текущую точку $M(x, y, z)$ и применяя рассуждения предыдущего пункта, получаем:

$$M \in \Pi \iff \overline{AM} \cdot \overline{n} = 0 \iff \overline{AM} \cdot (\overline{\mu} \times \overline{\nu}) = 0 \iff \overline{AM} \cdot \overline{\mu} \cdot \overline{\nu} = 0 \iff \begin{vmatrix} x - a_1 & \mu_1 & \nu_1 \\ y - a_2 & \mu_2 & \nu_2 \\ z - a_3 & \mu_3 & \nu_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Уравнение

$$\begin{vmatrix} x - a_1 & \mu_1 & \nu_1 \\ y - a_2 & \mu_2 & \nu_2 \\ z - a_3 & \mu_3 & \nu_3 \end{vmatrix} = 0 \qquad (17)$$

называется ***уравнением плоскости по точке*** A ***и двум векторам*** $\overline{\mu}$ ***и*** $\overline{\nu}$.

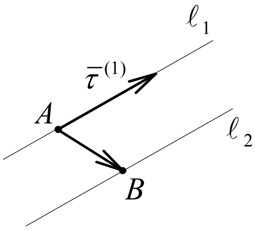
Пример 28. Доказать, что прямые $\ell_1 : \begin{cases} x = 4t + 2 \\ y = -6t \\ z = -8t - 1 \end{cases}$ и $\ell_2 : \begin{cases} x = -6t + 7 \\ y = 9t + 2 \\ z = 12t \end{cases}$ параллельны, но не совпадают, и записать уравнение плоскости, проходящей через ℓ_1 и ℓ_2.

1.Направляющие векторы данных прямых соответственно равны $\overline{\tau}^{(1)} = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ -8 \end{pmatrix}$ и $\overline{\tau}^{(2)} = \begin{pmatrix} -6 \\ 9 \\ 12 \end{pmatrix}$. Так как отношения соответствующих координат равны $\frac{-6}{4} = \frac{9}{-6} = \frac{12}{-8} = -1{,}5$, то $\overline{\tau}^{(2)} = -1{,}5\overline{\tau}^{(1)}$, т.е. эти векторы линейно зависимы (коллинеарны). Значит, $\ell_1 \| \ell_2$.

2.Теперь чтобы доказать, что ℓ_1 и ℓ_2 не совпадают, достаточно проверить, что точка, лежащая на одной прямой, не лежит на другой. Положив $t = 0$ в первой системе, получаем точку $A(2, 0, -1) \in \ell_1$. Покажем, что $A \notin \ell_2$.

Подставим координаты точки M во вторую систему: $\begin{cases} 2=-6t+7 \\ 0=9t+2 \\ -1=12t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=\dfrac{5}{6}; \\ t=-\dfrac{2}{9}; \\ t=-\dfrac{1}{12}. \end{cases}$

Эта система противоречива, поэтому $A \notin \ell_2$.



3. Запишем уравнение плоскости, проходящей через ℓ_1 и ℓ_2. Положив $t=0$ в параметрических уравнениях прямой ℓ_2, получим точку $B(7,2,0) \in \ell_2$. Возьмем $\bar{\mu}=\bar{\tau}^{(1)}=\begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ -8 \end{pmatrix}, \bar{\nu}=\overline{AB}=\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$

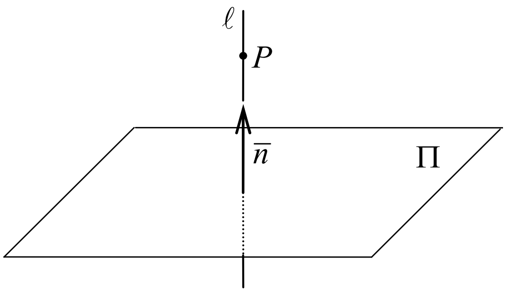
По формуле (17) получаем искомое уравнение плоскости:

$$\begin{vmatrix} x-2 & 4 & 5 \\ y & -6 & 2 \\ z+1 & -8 & 1 \end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow (x-2)\begin{vmatrix} -6 & 2 \\ -8 & 1 \end{vmatrix}-y\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ -8 & 1 \end{vmatrix}+(z+1)\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ -6 & 2 \end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 10(x-2)-44y+38(z+1)=0 \Leftrightarrow 10x-44y+38z+18=0 \Leftrightarrow 5x-22y+19z+9=0.$$

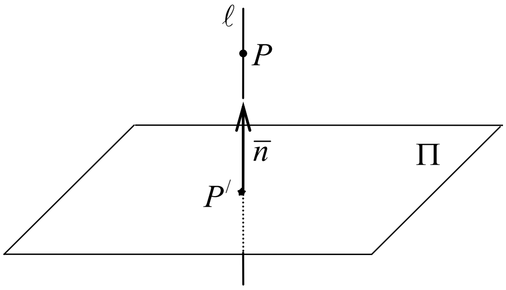
Решим ещё несколько задачна прямую и плоскость в пространстве.

*Пример 29.*Найти точку Q, симметричную точке $P(2,7,1)$ относительно плоскости Π: $x-4y+z+7=0$.



1.Запишем уравнение прямой ℓ, проходящей через точку Pперпендикулярно плоскости Π. Так как в качестве направляющего вектора $\bar{\tau}$ прямой ℓ можно взять нормальный вектор плоскости Π $\bar{n}=\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$,

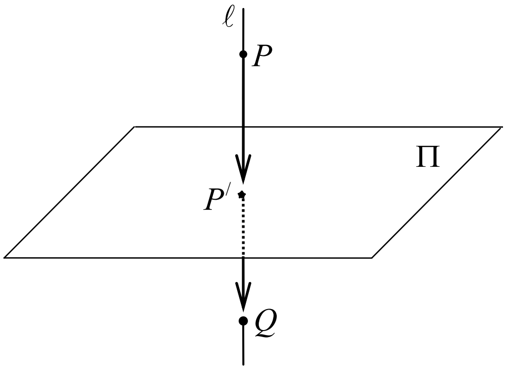
то параметрические уравнения ℓ имеют вид: $\begin{cases} x=t+2; \\ y=-4t+7; \\ z=t+1. \end{cases}$.



2.Найдем точку пересечения $P^{/}$ прямой ℓ и плоскости П. Для этого решим систему уравнений:

$$\begin{cases} x = t + 2 \\ y = -4t + 7 \\ z = t + 1 \\ x - 4y + z + 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = t + 2; \\ y = -4t + 7; \\ z = t + 1; \\ t + 2 - 4(-4t + 7) + t + 1 + 7 = 0. \end{cases}$$

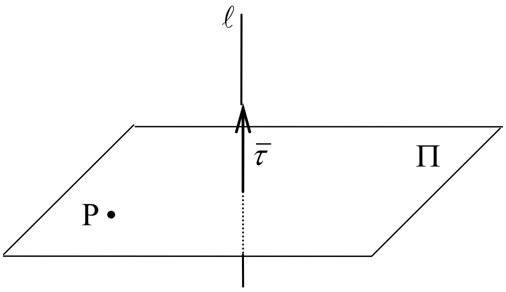
Таким образом, $18t=18 \;\Rightarrow\; t=1 \;\Rightarrow x=3,\ y=3,\ z=2$, т.е. $P^{/}(3{,}3{,}2)$.



3. Пусть $Q(x, y, z)$ – точка, симметричная точке P относительно плоскости П. Так как $\overline{PP^{/}} = \overline{P^{/}Q}$,

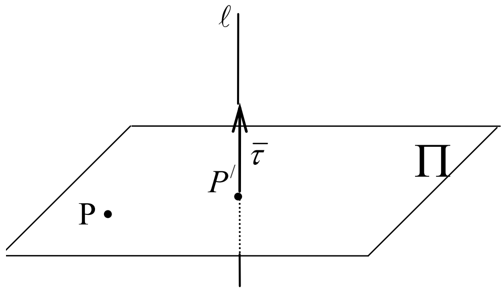
то $\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-3 \\ y-3 \\ z-2 \end{pmatrix} \Rightarrow\; x=4,\ y=-1,\ z=3$, т.е. $Q(4,-1,3)$.

*Пример 30.*Найти точку Q, симметричную точке $P(4{,}3{,}10)$ относительно прямой ℓ : $\begin{cases} x=2t+1 \\ y=4t+2 \\ z=5t+3 \end{cases}$.



1.Запишем уравнение плоскости П, проходящей через точку P перпендикулярно прямой ℓ. Так как в качестве нормального вектора плоскости П можно взять направляющий вектор прямой ℓ, который равен $\overline{\tau} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$, то по формуле (16):

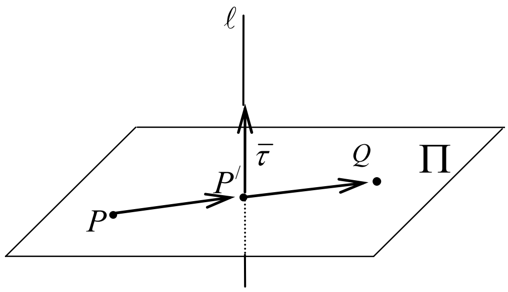
$$П: 2(x-4) + 4(y-3) + 5(z-10) = 0 \Leftrightarrow 2x + 4y + 5z - 70 = 0.$$



2.Найдем точку пересечения $P^{/}$ прямой ℓ и плоскости Π. Решим систему уравнений:

$$\begin{cases} x=2t+1 \\ y=4t+2 \\ z=5t+3 \\ 2x+4y+5z-70=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2t+1 \\ y=4t+2 \\ z=5t+3 \\ 2(2t+1)+4(4t+2)+5(5t+3)-70=0 \end{cases}.$$

Получаем: $45t = 45 \Rightarrow t = 1 \Rightarrow x = 3, y = 6, z = 8$, т.е. $P^{/}(3,6,8)$.



3.Пусть $Q(x, y, z)$ – точка, симметричная точке P относительно прямой ℓ. Так как $\overline{PP^{/}}=\overline{P^{/}Q}$,

то $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x-3 \\ y-6 \\ z-8 \end{pmatrix} \Rightarrow x=2,\ y=9,\ z=6$,т.е. $Q(2,9,6)$.

Прямая в R^2

Общим уравнением прямой на плоскости называется уравнение вида:

$$Ax + By + C = 0. \tag{18}$$

Если $B \neq 0$, то разрешая (18) относительно y, получимуравнениепрямой с угловым коэффициентом:

$$y = kx + b \quad \left(k = -\frac{A}{B}; b = -\frac{C}{B}\right). \tag{19}$$

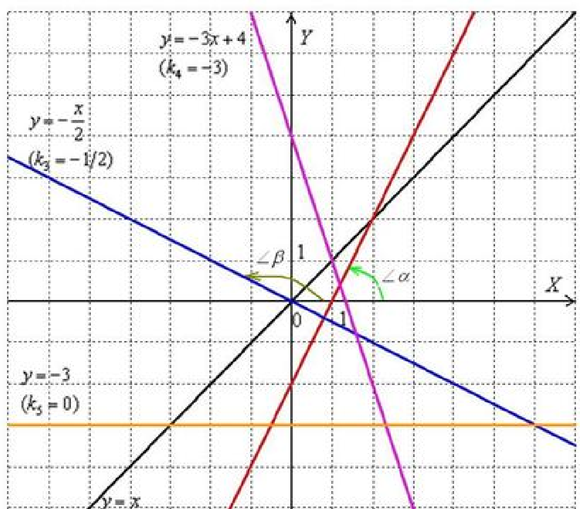


Рис. 1

Таким образом, геометрический смысл числа k состоит в том, что $k = tg\alpha$, где α – угол, образованный прямой с положительным направлением оси Ox. У параллельных прямых угловые коэффициенты равны ($k_1 = k_2$). У перпендикулярных прямых угловые коэффициенты обратны по величине и противоположны по знаку $\left(k_1 = -\dfrac{1}{k_2}\right)$. Уравнение прямой, имеющей угловой коэффициент k и проходящей через точку $A(a_1, a_2)$, записывается в виде:

$$y - a_2 = k(x - a_1). \tag{20}$$

Уравнение прямой, проходящей через две точки $A(a_1, a_2)$ и $B(b_1, b_2)$, имеет вид:

$$\begin{vmatrix} x_1 - a_1 & x_2 - a_2 \\ b_1 - a_1 & b_2 - a_2 \end{vmatrix} = 0.$$

РАЗДЕЛ 2.ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ

Лекция 5

Определение производной

Пусть функция $y = f(x)$ определена на открытом интервале $J = (a,b)$ действительной прямой R, точка $x \in J$ и число Δx (называемое приращением независимой переменной x таково, что $x + \Delta x \in J$. При этом выражение $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ называют приращением данной функции в точке $x \in J$.

Определение 23. Производной $y' = f'(x)$ функции $y = f(x)$ в точке $x \in J$ называется предел отношения приращения функции в точке $x \in J$ к приращению независимой переменной, когда приращение Δx независимой переменной стремится к нулю, т.е.

$$y' = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Функция $y = f(x)$ называется дифференцируемой на интервале $J = (a,b)$, если она имеет производную в каждой точке этого интервала. Процесс вычисления производной называется дифференцированием.

■

Правила дифференцирования

1.Производная постоянной функции равна нулю, т.е. если $y = c = const$, то $y' = c' = 0$.

2.Производная суммы двух функций равна сумме производных этих функций, т.е. если $f'(x)$ и $g'(x)$ существуют, то

$$[f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x).$$

3.Постоянный множитель можно вынести за знак производной, т.е. если $c = const$, а $f'(x)$ существует, то

$$[c \cdot f(x)]' = c \cdot f'(x).$$

4.Производная произведения двух функций равна производной первой функции, умноженной на вторую, плюс первая функция, умноженная на производную второй; т.е. если $f'(x)$ и $g'(x)$ существуют, то

$$[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x).$$

5.Производная частного двух функций равна дроби, знаменатель которой равен квадрату знаменателя исходной дроби, а в числителе которой стоит производная числителя исходной дроби, умноженная на ее знаменатель, минус числитель исходной дроби, умноженный на производную ее знаменателя; т.е. если $f'(x)$ и $g'(x)$ существуют и $g(x) \neq 0$, то

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}.$$

6.Производная сложной функции (цепное правило): если $y = g(u)$, где в свою очередь $u = f(x)$, и если $f'(x)$ и $g'(u)$ существуют, то

$$[g(f(x))]' = g'(f(x)) \cdot f'(x).$$

Таблица 1

Таблица производных элементарных функций

Производные степенной, показательной и логарифмической функций	Производные тригонометрич. функций	Производные обратных тригонометрических функций
$\left(x^{\alpha}\right)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$ $(\alpha = const)$	$(\sin x)' = \cos x$	$(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\left(a^{x}\right)' = a^{x} \cdot \ln a$ $(a = const, a > 0)$	$(\cos x)' = -\sin x$	$(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \cdot \ln a}$ $(a = const, a > 0,\ a \neq 1)$	$(tgx)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	$(arctgx)' = \dfrac{1}{1+x^2}$
$\left(e^{x}\right)' = e^{x}$, $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$ (частные случаи формул при $a = e = 2{,}718...$(где e – число Эйлера)	$(ctgx)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$(arcctgx)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$

Порядок действий в математическом выражении

и дифференцирование сложных функций

Рассмотрим две функции: $y_1 = \sin x^3$ и $y_2 = \sin^3 x$. Они очень похожи. Для правильного их дифференцирования нужно отчетливо выделить операции, которые производятся над переменной x в данных математических выражениях. У первой функции переменная x сначала возводится в куб, а затем на полученный результат действует функция синус. Таким образом, $y_1 = \sin\left(x^3\right)$. Наоборот, у второй функции переменная x сначала подвергается действию функции синус, а затем результат возводится в куб, т.е. $y_2 = (\sin x)^3$. Найдем производные этих функций, применяя цепное правило и таблицу производных (табл. 1). Заметим, что начинать дифференцирование нужно с последней операции, затем дифференцируют предпоследнюю операцию и, действуя таким образом, заканчивают производной первой операции.

Последней операцией функции $y_1 = \sin\left(x^3\right)$ является операция синус, производная которой есть косинус, поэтому первым звеном цепного правила является функция $\cos\left(x^3\right)$. При этом у полученной нами функции сохранился аргумент, которым обладал синус. Предпоследней операцией у рассматриваемой функции является возведение в куб (эта операция в данном примере одновременно является первой). Поэтому второе (и заключительное) звено цепного правила — это производная степенной функции x^3, т.е. функция $3x^2$. Руководствуясь формулой (6) правил дифференцирования, окончательно получаем: $(y_1)' = \cos\left(x^3\right)\cdot 3x^2$.

Последней операцией функции $y_2 = (\sin x)^3$ является возведение в куб, поэтому у ее производной первым звеном будет функция $3(\sin x)^2$. Отметим, что так как у исходной функции аргументом, который возводился в куб, был $\sin x$, то этот аргумент сохранился и в первом звене дифференцирования. Предпоследней (и одновременно первой) операцией рассматриваемой функции является синус, поэтому второе звено будет равно $\cos x$. Окончательно получаем: $(y_2)' = 3(\sin x)^2 \cdot \cos x = 3\sin^2 x \cdot \cos x$.

Продифференцируем теперь сложную функцию, состоящую из трех операций, а именно функцию $y = tg^2 x^5$. Вычленим составляющие эту функцию простые операции: $y = \left(tg(x^5)\right)^2$. Здесь первая операция – возведение переменной x в пятую степень, вторая операция – взятие тангенса от полученного результата и, наконец, последняя операция – возведение всего, что получилось, в квадрат. При дифференцировании цепное правило даст три звена. Первое звено получим, дифференцируя последнюю операцию. Оно будет состоять из функции $2\left(tg(x^5)\right)$. Второе звено – производная предпоследней операции – равно

$\frac{1}{\cos^2(x^5)}$. И, наконец, последнее звено есть функция $5x^4$. Итак, $y' = 2tg(x^5)\cdot\frac{1}{\cos^2(x^5)}\cdot 5x^4$.

Некоторые замечания, полезные при дифференцировании

1. Если нужно продифференцировать функцию, содержащую радикалы, то перед дифференцированием эти радикалы следует перевести в дробные степени. Например, пусть $y = \sqrt[5]{9x^5+4x^3-17} + x\sqrt[3]{x^2}$. Сначала преобразовываем эту функцию к виду: $y = \left(9x^5+4x^3-17\right)^{\frac{1}{5}} + x^{\frac{5}{3}}$. Теперь производная вычисляется без труда: $y' = \frac{1}{5}\left(9x^5+4x^3-17\right)^{-\frac{4}{5}}\cdot\left(45x^4+12x^2\right)+\frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}}$.

2. Если нужно продифференцировать дробь, числитель которой – постоянное число, то перед дифференцированием знаменатель с показателем минус единица нужно поместить в числитель. Пусть, например, $y = \frac{1}{x} - \frac{2}{x^8} + \frac{7}{\sqrt{x^2+3}}$. Преобразовываем функцию следующим образом: $y = x^{-1} - 2x^{-8} + 7\left(x^2+3\right)^{-\frac{1}{2}}$. Теперь $y' = -x^{-2} + 16x^{-9} - \frac{7}{2}\left(x^2+3\right)^{-\frac{3}{2}}\cdot 2x = -\frac{1}{x^2} + \frac{16}{x^9} - \frac{7x}{\sqrt{\left(x^2+3\right)^3}}$.

3. При дифференцировании не следует путать производные степенной и показательной функций. Для примера рассмотрим функции $y_1 = \arcsin^2 x$ и $y_2 = 2^{\arcsin x}$. У функции $y_1 = (\arcsin x)^2$ первая операция есть функция арксинус, а вторая операция – степенная функция (возведение в степень с постоянным показателем 2). Поэтому, следуя правилу дифференцирования сложной функции, получим $y_1' = 2\arcsin x\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. У второй функции первая операция также есть функция арксинус, но вторая операция – это взятие постоянного числа 2 с показателем $\arcsin x$, т.е. показательная функция. Поэтому $y_2' = 2^{\arcsin x}\cdot\ln 2\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Логарифмическое дифференцирование

Разберем этот своеобразный метод на конкретном примере.

Пример 31. Найдем производную функции $y = x^{\arccos x^6}$. У этой функции и в основании, и в показатели содержится переменная x. В таких случаях применяется так называемый метод логарифмического дифференцирования. Сначала прологарифмируем данную функцию: $\ln y = \ln\left(x^{\arccos x^6}\right) = \arccos x^6 \cdot \ln x$.

Теперь найдем производные обеих частей полученного равенства:

$$\frac{1}{y}\cdot y' = \left(\arccos x^6\right)' \cdot \ln x + \arccos x^6 \cdot (\ln x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-(x^6)^2}}\cdot 6x^5 \cdot \ln x + \arccos x^6 \cdot \frac{1}{x}.$$

В результате получаем:

$$y' = y\left(-\frac{1}{\sqrt{1-x^{12}}}\cdot 6x^5 \cdot \mathbf{ln}\, x + \mathbf{arccos}\, x^6 \cdot \frac{1}{x}\right) =$$

$$= x^{\mathbf{arccos}\, x^6}\left(-\frac{6x^5 \cdot \mathbf{ln}\, x}{\sqrt{1-x^{12}}} + \frac{\mathbf{arccos}\, x^6}{x}\right).$$

Лекция 6
Предел функции

Определение предела функции

В дальнейшем через N мы будем обозначать множество натуральных чисел. Итак, $N = \{1, 2, ..., n, ...\}$.

Рассмотрим функцию $y = f(x)$ действительной переменной x с областью определения $D(y)$, и пусть a и b либо действительные числа, либо бесконечно удаленная точка (т.е. $+\infty, -\infty$ или просто ∞).

Определение 24:

1. Точка b называется пределом функции $y = f(x)$ при x стремящемся к a, если для любой последовательности $\{x_n\} \subset D(y)$, строго стремящейся к a (т.е. бесконечно приближающейся к $y = f(x)$, но не посещающей точку a),

последовательность $\{f(x_n)\}$ стремится к точке b. То, что b является пределом функции $y = f(x)$ при x стремящемся к a, обозначают так: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$.

2. Точка b называется левым (соответственно правым) пределом функции $y = f(x)$ при xстремящемся к a, если для любой последовательности $\{x_n\} \subset D(y)$, строго монотонно возрастающей (соответственно, строго монотонно убывающей) к a, последовательность $\{f(x_n)\}$ стремится к точке b. Обозначение левого предела: $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = b$ (соответственно, правого предела: $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = b$).

■

Отметим, что из определения 24 сразу вытекает, что если предел (левый предел, правый предел) функции существует, то этот предел единственен.

Пример 32. Рассмотрим функцию

$$y = f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2}, x < 2; \\ -x + 5, x > 2. \end{cases}.$$

Ее график имеет вид, представленный на рис. 2.

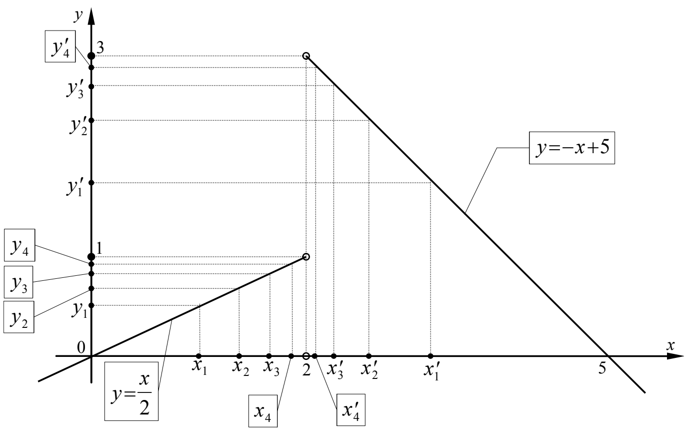


Рис. 2

Заметим, что данная функция не определена в точке $x = a = 2$. Однако этот факт не влияет на вычисление предела (левого предела, правого предела) функции при стремлении x к этой точке, так как последовательность $\{x_n\}$, фигурирующая в определении 24, **не посещает** предельную точку $a = 2$.

Рассмотрим сначала последовательность $\{x_n\}$, строго монотонно возрастающую к $a=2$, и обозначим $y_n = f(x_n)$. Так как $\forall n \in N \; x_n < 2$, то, используя вид нашей функции, получаем: $y_n = \frac{x_n}{2}$. Из рис. 2 видно, что при $n \to \infty$ последовательность $y_n \to 1$. Это означает, что $\lim\limits_{x \to 2-0} f(x) = 1$.

Рассмотрим теперь последовательность $\{x_n'\}$, строго монотонно убывающую к $a=2$, и обозначим $y_n' = f(x_n')$. Так как $\forall n \in N \; x_n' > 2$, то, используя вид нашей функции, получим: $y_n' = -x_n' + 5$. Из рис. 2 видно, что при $n \to \infty$ последовательность $y_n' \to 3$. Это означает, что $\lim\limits_{x \to 2+0} f(x) = 3$.

Ясно, что $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ не существует. Действительно, рассмотрим последовательность $x_1, x_1', x_2, x_2', \ldots, x_n, x_n', \ldots$, которая, очевидно, строго стремится к точке $a=2$. Однако ясно, что последовательность соответствующих значений функции $y = f(x)$, т.е. последовательность $y_1, y_1', y_2, y_2', \ldots y_n, y_n', \ldots$, не приближается ни к какой точке. Согласно пункту 1) определения 24, получаем, что $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ не существует. Читателю предлагается скрупулезно произвести все необходимые рассуждения.

Пример 33. Переместим параллельно самой себе правую ветвь графика (рис. 2) на 2 единицы вниз. Получим следующий график:

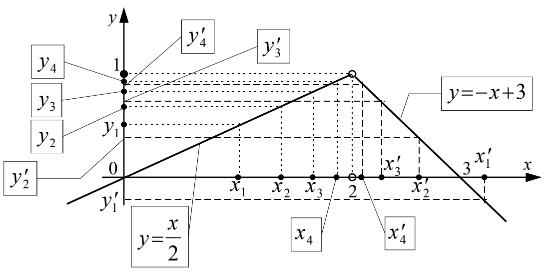


Рис. 3

Это график функции:

$$y = f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2}, & x < 2; \\ -x + 3, & x > 2. \end{cases}$$

Рассуждая так же, как в примере 32, легко получить, что $\lim\limits_{x\to 2-0} f(x)=1$, $\lim\limits_{x\to 2+0} f(x)=1$, и предел функции при $x\to 2$ существует и равен 1, т.е. $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=1$.

Теорема 8. Если $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=b$, то $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$.

■

Пример 34. Рассмотрим функцию $y=\ln x:=\log_e x$, где e – число Эйлера. Пусть $a=0$. Ясно, что не существует последовательности $\{x_n\}\subset D(y)$, строго монотонно возрастающей к $a=0$ (о левом пределе говорить бессмысленно). Однако существуют последовательности $\{x_n\}\subset D(y)$, строго монотонно убывающие к $a=0$ (например, можно взять $x_n=\frac{1}{2^n}$). Легко видеть (постройте график!), что для таких последовательностей $\lim\limits_{n\to\infty}\ln x_n=-\infty$. Это означает, что $\lim\limits_{x\to 0+0}\ln x=-\infty$. Для упрощения записи в таких случаях часто пишут $\lim\limits_{x\to 0}\ln x=-\infty$.

Свойства предела функции

1.Предел константы равен самой этой константе: если $f(x)=c=const$, то

$$\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a} c=c.$$

2.Предел суммы двух функций равен сумме пределов этих функций: если $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ существуют и конечны, то

$$\lim_{x\to a}[f(x)+g(x)]=\lim_{x\to a} f(x)+\lim_{x\to a} g(x).$$

3.Постоянный множитель можно вынести за знак предела: если $c=const$ и $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ существует и конечен, то

$$\lim_{x\to a}[c\cdot f(x)]=c\cdot\lim_{x\to a} f(x).$$

4. Предел произведения двух функций равен произведению пределов этих функций: если $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ существуют и конечны, то

$$\lim_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)]=\lim_{x\to a} f(x)\cdot\lim_{x\to a} g(x).$$

5. Предел частного двух функций равен частному пределов этих функций: если $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ существуют, конечны и $\lim\limits_{x\to a} g(x)\neq 0$, то

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}.$$

6.Если в некоторой окрестности точки *a* (исключая, быть может, саму точку *a*) $f(x)\le g(x)$ и пределы $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ существуют, то

$$\lim_{x\to a} f(x)\le \lim_{x\to a} g(x).$$

7.Если $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} g(x)=b$ и если в некоторой окрестности точки *b* (исключая, быть может, саму точку*a*) $f(x)\le h(x)\le g(x)$, то предел $h(x)$ существует и

$$\lim_{x\to a} h(x)=b.$$

8.Если в некоторой окрестности точки a (исключая, быть может, точку a) функция $y=f(x)$ ограничена ($\exists M: 0<M<+\infty$ такое, что в этой окрестности $|f(x)|\le M$), а $\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$, то

$$\lim_{x\to a}\left[f(x)\cdot g(x)\right]=0.$$

Замечательные пределы

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ (первый замечательный предел).

2. $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$ (второй замечательный предел).

Непрерывные функции

Определение 25. Функция $y=f(x)$ называется непрерывной в точке $a\in D(y)$, если

$$\lim_{x\to a} f(x)=f(a). \tag{21}$$

Если равенство (21) не выполняется, то функция $y=f(x)$ называется разрывной в точке *a.*

■

В примерах 32 и 33 рассматриваемые функции не были определены в точке $x = a = 2$, поэтому такие функции также считаются разрывными в этой точке.

Пример 35. Рассмотрим функцию из примера 33, но "доопределенную" в точке $x = a = 2$:

$$y = f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2}, x < 2; \\ 3/2, x = 2; \\ -x + 3, x > 2. \end{cases}.$$

График этой функции приведен на рис. 4.

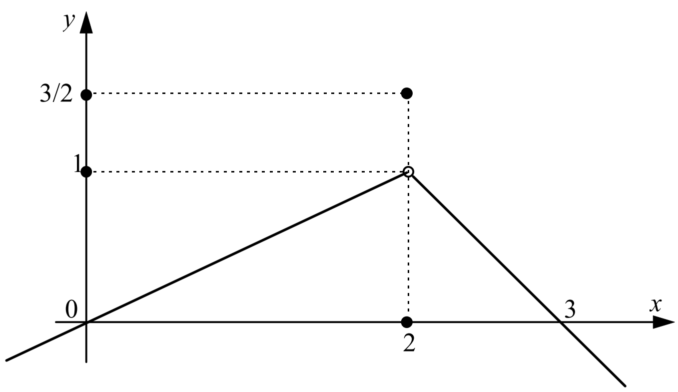


Рис. 4

Согласно определению 24, вычисляя предел функции при $x \to a$, мы не используем значение функции в точке a. Поэтому предел, вычисленный нами в примере 33, сохраняет свое значение, т.е. и в данном случае $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 1$.

Значение же функции в точке $x = a = 2$ равно $f(2) = 3/2$. Определение 25 не выполняется, поэтому данная функция разрывна в точке $x = a = 2$. Геометрически это выглядит как разрыв графика в точке $x = a = 2$ (см. рис. 4).

Если в точке $x = a = 2$ функцию из примера 33 доопределить единицей (т.е. положить $f(2) = 1$), то она станет непрерывной в точке $x = a = 2$.

Определение 26. Функция $y = f(x)$ называется непрерывной на множестве $J \subset D(y)$, если она непрерывна в каждой точке этого множества.

■

Свойства непрерывных функций

1.Постоянная функция непрерывна.

2.Сумма двух непрерывных функций непрерывна.

3.Произведение непрерывной функции на число есть непрерывная функция.

4.Произведение двух непрерывных функций непрерывно.

5.Частное двух непрерывных функций непрерывно в точках, в которых знаменатель неравен нулю.

6.Сложная функция, состоящая из двух непрерывных функций, непрерывна (определение сложной функции содержится в вводной лекции в шестом правиле дифференцирования).

Теорема 9. Основные элементарные функции (функции, представленные в табл. 1) непрерывны на своих областях определения.

■

*Теорема 10.*Все элементарные функции (т.е.функции, которые образованы из основных элементарных функций с помощью конечного числа арифметических операций и взятия сложных функций) непрерывны на своих областях определения.

■

Лекция7
Техника вычисления пределов

Эквивалентные функции. Бесконечно малые функции (б.м.ф.)
и бесконечно большие функции (б.б.ф.)

Определение 27. Функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ называются эквивалентными при $x \to a$, если

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Обозначение эквивалентности функций таково: $f(x) \sim g(x)$ при $x \to a$.

■

Аналогично определяются и обозначаются эквивалентные функции при $x \to a-0$ и $x \to a+0$.

Заметим, что в силу свойства 5 предела функции, равенство в определении 27 равносильно равенству $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{g(x)}{f(x)}=1$.

*Определение 28.*Функция $y=f(x)$ называется бесконечно малой функцией (б.м.ф.) при $x \to a$, если $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$. Функция $y=f(x)$ называется бесконечно большой функцией (б.б.ф.) при $x \to a$, если $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$.

■

Легко видеть, что бесконечно малая функция может быть эквивалентна только бесконечно малой функции, а бесконечно большая функция – только бесконечно большой.

Теорема 11. При $x \to 0$ справедлива следующая цепочка эквивалентныхб.м.ф.:

$$x \sim \sin x \sim tgx \sim \arcsin x \sim arctgx \sim \ln(1+x) \sim e^x - 1 .$$

■

*Теорема 12.*При $x \to \infty$справедлива следующая эквивалентность многочлена своей старшей степени:

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 \sim a_n x^n ,$$

где $a_n \neq 0$.

■

При вычислении пределов с помощью эквивалентных функций весьма полезна следующая простая теорема.

<u>*Теорема 13.*</u> Если при $x \to a$ $f_1(x) \sim g_1(x)$ и $f_2(x) \sim g_2(x)$, то

$$\lim_{x\to a}\frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \lim_{x\to a}\frac{g_1(x)}{g_2(x)}$$

в случае, когда один из этих пределов существует.

■

Пример 36. Вычислить предел: $b = \lim\limits_{x \to -1} \dfrac{3x^3 - 5x^2 + 7x + 1}{x^2 - 5x + 6}$.

Так как в точке $x = -1$ знаменатель функции, стоящей под знаком предела, неравен нулю, то эта функция непрерывна в точке $x = -1$. Следуя определению 25, для подсчета b достаточно вычислить эту функцию при $x = -1$: $b = \frac{3(-1)^3 - 5(-1)^2 + 7\cdot(-1) + 1}{(-1)^2 - 5\cdot(-1) + 6} = -\frac{7}{6}$.

Следующая теорема аккумулирует предельные соотношения, хорошо известные из школьного курса математики.

<u>*Теорема 14.*</u> 1. Если $\alpha > 0$, то $\lim\limits_{x \to 0+0} x^\alpha = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} x^\alpha = +\infty$; если же $\alpha < 0$, то $\lim\limits_{x \to 0+0} x^\alpha = +\infty$, а $\lim\limits_{x \to +\infty} x^\alpha = 0$.

2. Если $a > 1$, то $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = +\infty$; если же $0 < a < 1$, то $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = +\infty$, а $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = 0$. В частности, $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$.

3. Если $a > 1$, то $\lim\limits_{x \to 0+0} \log_a x = -\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \log_a x = +\infty$; если же $0 < a < 1$, то $\lim\limits_{x \to 0+0} \log_a x = +\infty$, а $\lim\limits_{x \to +\infty} \log_a x = -\infty$. В частности, $\lim\limits_{x \to 0+0} \ln x = -\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$.

4. $\lim\limits_{x \to -\frac{\pi}{2}+0} tgx = -\infty$, $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}-0} tgx = +\infty$, $\lim\limits_{x \to 0+0} ctgx = +\infty$, $\lim\limits_{x \to \pi-0} ctgx = -\infty$.

5. $\lim\limits_{x \to -1+0} \arcsin x = -\dfrac{\pi}{2}$, $\lim\limits_{x \to 1-0} \arcsin x = \dfrac{\pi}{2}$, $\lim\limits_{x \to -1+0} \arccos x = \pi$, $\lim\limits_{x \to 1-0} \arccos x = 0$.

6. $\lim\limits_{x \to -\infty} arctgx = -\dfrac{\pi}{2}$, $\lim\limits_{x \to +\infty} arctgx = \dfrac{\pi}{2}$, $\lim\limits_{x \to -\infty} arcctgx = \pi$, $\lim\limits_{x \to +\infty} arcctgx = 0$.

■

Читателю рекомендуется просмотреть все эти равенства на графиках функций (см. [14]).

Запишем некоторые очевидные соотношения, связанные с символом ∞:

$$\frac{1}{\infty} = 0, \frac{1}{0} = \infty .$$

Легко также обосновать следующие соотношения (здесь c – ненулевая константа):

$$c+\infty=\infty,\ c\cdot\infty=\infty,\ \infty\cdot\infty=\infty,\ \frac{\infty}{0}=\infty,\ \frac{0}{\infty}=0,\ \infty^{\infty}=\infty,\ 0^{\infty}=0\ .$$

Неопределенностями будем называть выражения

$$\frac{0}{0},\frac{\infty}{\infty},0\cdot\infty,0^0,\infty^0,1^{\infty},\infty-\infty \text{ и т.д.}$$

Пример 37. Вычислим предел $b=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^3-5x^2+7x+1}{x^2-5x+6}$. Применив эквивалентность из теоремы 12 и теорему 13, получаем: $b=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^3}{x^2}=\lim\limits_{x\to\infty}3x=3\cdot\lim\limits_{x\to\infty}x=3\cdot\infty=\infty$.

Пример 38. Вычислим предел $b=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+2}-\sqrt{x^2+3}\right)$. Переходя к пределу в каждом из радикалов, получаем неопределенность вида $\infty-\infty$. Разделив и умножив выражение, стоящее под знаком предела, на сопряженное выражение $\sqrt{x^2+2}+\sqrt{x^2+3}$, имеем:

$$b=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+2}-\sqrt{x^2+3}\right)\left(\sqrt{x^2+2}+\sqrt{x^2+3}\right)}{\sqrt{x^2+2}+\sqrt{x^2+3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(x^2+2\right)-\left(x^2+3\right)}{\sqrt{x^2+2}+\sqrt{x^2+3}}=\frac{-1}{+\infty}=0.$$

Пример 39. Вычислим предел $b=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x\cdot\arcsin x}-1}{\ln\left(1+tg\,7x^2\right)}$. Подставив $x=0$ отдельно в числитель и знаменатель, убеждаемся, что получили неопределенность вида $\frac{0}{0}$.

Так как при $x\to 0$ имеем $x\cdot\arcsin x\to 0$, то для числителя верна цепочка эквивалентностей при $x\to 0$:

$$e^{x\cdot\arcsin x}-1\sim x\cdot\arcsin x\sim x^2\ .$$

Аналогично, для знаменателя получаем:

$$\ln\left(1+tg7x^2\right)\sim tg7x^2\sim 7x^2\ .$$

По теореме 13 $b=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{7x^2}=\frac{1}{7}$.

Правило Лопиталя

Сейчас мы покажем, как можно вычислять пределы, используя понятие производной (лекция5).

Теорема 15 (правилоЛопиталя). Пусть при вычислении предела $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ мы получили неопределенность типа $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$. Тогда $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ (если последний предел существует).

■

Пример 40. Вычислим предел $b=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{1-2\cos x}{3x-\pi}$. Очевидно, здесь мы имеем неопределенность типа $\frac{0}{0}$. Применяем правило Лопиталя:

$$b=\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{(1-2\cos x)'}{(3x-\pi)'}=\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{2\sin x}{3}=\frac{2}{3}\cdot\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Пример 41. Имеем:

$$\lim_{x\to0}\left(\tfrac{1}{x^2}-\tfrac{1}{\sin^2 x}\right)=\infty-\infty=\lim_{x\to0}\tfrac{\sin^2 x-x^2}{x^2\cdot\sin^2 x}=\lim_{x\to0}\tfrac{\sin^2 x-x^2}{x^4}=\tfrac{0}{0}=\lim_{x\to0}\tfrac{2\sin x\cos x-2x}{4x^3}=\lim_{x\to0}\tfrac{\sin 2x-2x}{4x^3}=\tfrac{0}{0}$$
$$=\lim_{x\to0}\tfrac{2\cos 2x-2}{12x^2}=\tfrac{0}{0}=\lim_{x\to0}\tfrac{-4\sin 2x}{24x}=\lim_{x\to0}\tfrac{-8x}{24x}=-\tfrac{1}{3}.$$

*Пример 42.*Вычислим предел $b=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(4^x+5x^3\right)^{\frac{1}{x}}$. Имеем:

$\ln\left(4^x+5x^3\right)^{\frac{1}{x}}=\frac{1}{x}\cdot\ln\left(4^x+5x^3\right)$. По правилу Лопиталя

$$\lim_{x\to+\infty}\ln\left(4^x+5x^3\right)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\tfrac{\ln\left(4^x+5x^3\right)}{x}=\tfrac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to+\infty}\tfrac{4^x\ln 4+15x^2}{4^x+5x^3}=\ln 4$$

(последнее равенство получается четырехкратным применением правила Лопиталя). Окончательно: $b=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(4^x+5x^3\right)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}e^{\ln\left(4^x+5x^3\right)^{\frac{1}{x}}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(4^x+5x^3\right)^{\frac{1}{x}}}=e^{\ln 4}=4$.

Лекция8
Функции двух переменных

Частные производные

В этой лекции мы дадим краткий обзор основных понятий математического анализа, связанных с дифференцированием функций двух переменных. Почти все, что будет изложено, без существенных изменений может быть перенесено на функции n переменных.

Основная идея такова. Для того, чтобы функцию двух переменных $z = z(x, y)$ свести к функции одной переменной, одну из переменных (x или y) фиксируют (считают постоянной величиной), а производную вычисляют по другой переменной. Если зафиксирована переменная y ($y = const$), то производная по оставшейся переменной x обозначается z_x' (или $\frac{\partial z}{\partial x}$) и называется частной производной функции $z = z(x, y)$ по переменной x. Точно так же, если зафиксирована переменная x ($x = const$), то производная по оставшейся переменной y обозначается z_y' (или $\frac{\partial z}{\partial y}$) и называется частной производной функции $z = z(x, y)$ по переменной y.

Пример 43. Пусть $z = 3x^2y^5 + 7x^4 - 9y^3 + \frac{x}{y}$. Найдем частные производные этой функции. Сначала зафиксируем переменную y :пусть $y = const$. Тогда в первом члене функции z множитель $3y^5$ является постоянным и может быть вынесен за знак производной. Точно так же в последнем члене множитель $\frac{1}{y}$ является постоянным и может быть вынесен за знак производной. Третий член является постоянной величиной и поэтому производная от него равна нулю. В итоге получаем:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3y^5 \cdot 2x + 28x^3 - 0 + \frac{1}{y} = 6xy^5 + 28x^3 + \frac{1}{y}.$$

Теперь зафиксируем переменную x, т.е. пусть $x = const$. Тогда в первом члене функции z множитель $3x^2$ является постоянным и может быть вынесен за знак производной. Точно так же в последнем члене множитель x является постоянным и также может быть вынесен за знак производной. Второй член является постоянной величиной и поэтому производная от него равна нулю. Получаем:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 3x^2 \cdot 5y^4 + 0 - 27y^2 - \frac{x}{y^2} = 15x^2y^4 - 27y^2 - \frac{x}{y^2}.$$

Определение 29. Частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}(x, y)$ и $\frac{\partial z}{\partial y}(x, y)$ функции $z = z(x, y)$, вычисленные в точке $M(x, y)$, определяются формулами:

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x, y) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{z(x+\Delta x, y) - z(x, y)}{\Delta x},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}(x, y) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{z(x, y+\Delta y) - z(x, y)}{\Delta y}.$$

■

Определение 30. Частные производные второго порядка функции $z = z(x, y)$ определяются формулами:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right), \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right), \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right).$$

Последние две производные называются смешанными частными производными.

■

Пример 44 (продолжение примера 43). Имеем:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = 6y^5 + 84x^2, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = 60x^2y^3 - 54y + \frac{2x}{y^3},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = 30xy^4 - \frac{1}{y^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = 30xy^4 - \frac{1}{y^2}.$$

Теорема 16. Пусть функция $z = z(x, y)$ обладает непрерывными смешанными производными $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ и $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$. Тогда $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

■

Градиент и производная по направлению

Определение 31. Пусть $\bar{e}^0 = \begin{pmatrix} e_1^0 \\ e_2^0 \end{pmatrix}$ – единичный вектор и $z(x + te_1^0, y + te_2^0) - z(x, y)$ есть приращение функции $z = z(x, y)$ в направлении вектора $\bar{e}^0$. Если существует конечный предел

$$\lim_{t \to 0} \frac{z(x + te_1^0, y + te_2^0) - z(x, y)}{t},$$

то этот предел называется производной функции $z = z(x, y)$ в направлении вектора $\bar{e}^0$ и обозначается $\frac{\partial z}{\partial e}(x, y)$:

$$\frac{\partial z}{\partial e}(x_0, y_0) = (grad\ z(x_0, y_0)) \cdot \bar{e}^0 = e_1^0 \cdot \frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0) + e_2^0 \cdot \frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0),$$

где $grad\ z(x_0, y_0) := \begin{pmatrix} \frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0) \end{pmatrix}$ – вектор, называемый градиентом функции $z = z(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$.

■

Пример 45. Найдем $grad\ z$ и $\frac{\partial z}{\partial e}$ в точке $M_0(3,2)$ по направлению вектора $\bar{e} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$, если $z = 2x^2y - 3xy^3$. Сначала вычисляем частные производные: $\frac{\partial z}{\partial x} = 4xy - 3y^3$, $\frac{\partial z}{\partial y} = 2x^2 - 9xy^2$.

Следовательно,

$$\frac{\partial z}{\partial x}(3,2) = 4 \cdot 3 \cdot 2 - 3 \cdot 2^3 = 24 - 24 = 0,\ \frac{\partial z}{\partial y} = 2 \cdot 3^2 - 9 \cdot 3 \cdot 2^2 = 18 - 108 = -90,$$

т.е. $grad\, z(3{,}2) = \begin{pmatrix} 0 \\ -90 \end{pmatrix}$. Далее, пронормируем вектор $\bar{e}$, т.е. запишем вектор $\bar{e}^0$, имеющий единичную длину и направление, совпадающее с направлением вектора $\bar{e}$:

$$\|\bar{e}\| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = 5,\ \bar{e}^0 = \frac{\bar{e}}{\|\bar{e}\|} = \begin{pmatrix} -3/5 \\ 4/5 \end{pmatrix}.$$

По определению 31

$$\frac{\partial z}{\partial e}(3{,}2) = \begin{pmatrix} 0 \\ -90 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3/5 \\ 4/5 \end{pmatrix} = 0 \cdot (-3/5) - 90 \cdot (4/5) = -72.$$

РАЗДЕЛ 3. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ

Лекция 9

Неопределенный интеграл

Дифференциал функции

Рассмотрим функцию $y = f(x)$, дифференцируемую на интервале (c,d).

Определение 32. Дифференциалом независимой переменной x будем называть символ dx; дифференциалом функции $y = f(x)$ выражение вида $dy = f'(x)dx$.

■

Пример 46. Если $y = tgx$, то $dy = \frac{1}{\cos^2 x} dx$. Для функции $y = \arcsin^3 2x$ дифференциал вычисляется с использованием цепного правила: $dy = \left(3 \cdot \arcsin^2 2x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-4x^2}} \cdot 2\right) dx$.

Первообразная и неопределенный интеграл

Определение 33. Функция $y = F(x)$ называется первообразной функции $y = f(x)$ на интервале (c,d), если $\forall x \in (c,d)$ $F'(x) = f(x)$.

■

Условия существования первообразной даёт следующая теорема.

Теорема 17. (о существовании первообразной). Если функция $y = f(x)$ непрерывна на интервале (c,d), то на этом интервале данная функция обладает первообразной $y = F(x)$.

■

Ответим теперь на вопрос о том, сколькими первообразными обладает функция $y = f(x)$, непрерывная на (c,d).

Теорема 18. Если функция $F(x)$ является первообразной функции $f(x)$ на (c,d), то множество всех первообразных для $f(x)$ задаётся формулой $F(x)+C$, где $C-$ произвольное число.

■

Определение 34. Совокупность всех первообразных функции $y = f(x)$ на (c,d) называется ***неопределенным интегралом*** данной функции на этом интервале и обозначается $\int f(x)\,dx$. Из теоремы 18 немедленно получаем структуру неопределенного интеграла функции $y = f(x)$, а именно:

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \tag{22}$$

где $F(x)$ – фиксированная первообразная функции $y = f(x)$, а C – произвольная постоянная, могущая принимать любое действительное значение. Обратно, из (22) следует, что $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$. Это, в частности, означает, что тождества, содержащие неопределенные интегралы, можно доказывать дифференцированием обеих частей этих тождеств.

■

Из (22) следует, что $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$ и $\int dx = \int 1dx = x + C$. Эти равенства говорят о том, что операция взятия дифференциала функции обратна операции неопределенного интегрирования.

Таблица 2

Таблица неопределенных интегралов

Ниже приведены тождества, которые можно доказать, продифференцировав обе части.

1. $\int x^{\alpha} dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$, где $\alpha \neq -1$	7. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$
2. $\int x^{-1} dx = \left(\int \dfrac{dx}{x} \right) = \ln\lvert x\rvert + C$	8. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\dfrac{x}{a} + C, a > 0$
3. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$, где $a>0, a\neq 1$	8′. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \arcsin x + C$
3′. $\int e^x dx = e^x + C$	9. $\int \dfrac{dx}{a^2 + x^2} = \dfrac{1}{a} arctg\dfrac{x}{a} + C, a > 0$
4. $\int \sin x dx = -\cos x + C$	9′. $\int \dfrac{dx}{1 + x^2} = arctgx + C$
5. $\int \cos x dx = \sin x + C$	10. $\int \dfrac{dx}{x^2 - a^2} = \dfrac{1}{2a} \ln\left\lvert\dfrac{x-a}{x+a}\right\rvert + C, a > 0$
6. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$	11. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 + b}} = \mathbf{ln}\left\lvert x + \sqrt{x^2 + b}\right\rvert + C, b \neq 0$

Свойства неопределенных интегралов

Теорема 19 (свойство линейности). Если α и β – постоянные числа, то

$$\int \left(\alpha f(x) + \beta g(x)\right) dx = \alpha \int f(x)dx + \beta \int g(x)dx . \tag{23}$$

■

Пример 47. Вычислим интеграл $I = \int \left(5x^3 - 7x + 3 - \dfrac{1}{x^2 \cdot \sqrt[5]{x}} + \dfrac{2}{x} \right) dx$.

Применяя свойство линейности, получим:

$$I = 5\int x^3 dx - 7\int xdx + 3\int dx - \int \frac{1}{x^{\frac{11}{5}}} dx + 2\int \frac{dx}{x} = 5\int x^3 dx - 7\int xdx + 3\int dx - \int x^{-\frac{11}{5}} dx + 2\int \frac{dx}{x}.$$

Первый, второй и четвертый интегралы вычисляются по формуле (1) из табл.

2,в третьем интеграле символы $\int$ и d уничтожают друг друга, а последний интеграл вычисляется по формуле (2). В результате получаем:

$$I = 5\cdot\frac{x^4}{4} - 7\frac{x^2}{2} + 3x - \frac{x^{-\frac{6}{5}}}{-\frac{6}{5}} + 2\cdot\ln|x| + C = \frac{5x^4}{4} - \frac{7x^2}{2} + 3x + \frac{5}{6x^{\frac{6}{5}}} + 2\ln|x| + C.$$

Пример 48. Вычислим интеграл $I = \int\left(4cosx + 3^x - \frac{2}{1+x^2} + \frac{8}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx$.

Применяя свойство линейности, получим:

$$I = 4\int cosxdx + \int 3^x dx - 2\int\frac{dx}{1+x^2} + 8\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Первый интеграл вычисляется по формуле (5) из табл. 2, второй – по формуле (3) при $a=3$, третий – по формуле ($9'$), а четвёртый – по формуле ($8'$). В результате получаем:

$$I = 4\sin x + \frac{3^x}{\ln 3} - 2arctg\, x + 8\arcsin x + C.$$

Теорема 20 (формула замены переменной). Справедлива формула:

$$\int g(f(x))f^{/}(x)dx = \int g(t)dt\Big|_{t\,=\,f(x)}, \tag{24}$$

где выражение справа означает, что сначала вычисляем интеграл по переменной t (как если бы эта переменная была независимой), а затем вместо t подставляем $f(x)$.

■

Следствие. Если $G(t)$ – первообразная функции $g(t)$, то

$$\int g(kx+b)dx = \frac{1}{k}\cdot G(kx+b) + C. \tag{25}$$

Пример 49. Вычислим интегралы:

$$I_1 = \int e^{3-5x}dx \text{ и } I_2 = \int\cos^4 x\sin xdx.$$

Для вычисления I_1 полагаем $g(t)=e^t$ и $kx+b=-5x+3$. Тогда $G(t)=e^t$ (см. формулу ($3'$)табл. 2) и по формуле (25) имеем: $I_1=-\frac{1}{5}\cdot e^{3-5x}+C$. Вычисление I_2 проведем по следующей схеме, реализующей соотношение (24):

$$I_2=\int\cos^4 x\sin xdx=\left|\begin{matrix} t=\cos x \\ dt=-\sin xdx \Rightarrow \sin xdx=-dt\end{matrix}\right|=-\int t^4dt=-\frac{t^5}{5}+C=-\frac{\cos^5 x}{5}+C.$$

Пример 50. Вычислим интеграл $I=\int\frac{dx}{(2x+3)^2}$, используя формулу (25). Можно расписать решение и более подробно, применяя формулу (24):

$$I=\int(2x+3)^{-2}dx=\left|\begin{matrix} t=2x+3 \\ dt=(2x+3)'dx=2dx \Rightarrow dx=\frac{1}{2}dt\end{matrix}\right|=\int t^{-2}\frac{dt}{2}=\frac{1}{2}\int t^{-2}dt=\frac{1}{2}\cdot\frac{t^{-2+1}}{-2+1}+C$$

Последний интеграл вычислен по формуле 1 из таблицы интегралов, в которой переменная интегрирования вместо x обозначена t, а $\alpha=-2$. После обратной замены получим результат:

$$I=\frac{(2x+3)^{-1}}{-2}+C=\frac{1}{-2(2x+3)}+C.$$

Теорема 21 (формула интегрирования по частям). Если $u=u(x)$, $v=v(x)$ – две дифференцируемые функции, то

$$\int udv=uv-\int vdu. \tag{26}$$

■

Пример 51. Вычислим интеграл $I=\int x\cdot\cos(3x-1)dx$ по схеме, реализующей соотношение (26):

$$I=\int x\cdot\cos(3x-1)dx=\left|\begin{matrix} u=x \Rightarrow du=dx \\ dv=\cos(3x-1)dx \Rightarrow v=\int\cos(3x-1)dx=\frac{1}{3}\sin(3x-1)\end{matrix}\right|=\frac{x\sin(3x-1)}{3}-\int\frac{1}{3}\sin(3x-1)dx=$$

$$=\frac{x\sin(3x-1)}{3}+\frac{1}{9}\cos(3x-1)+C.$$

Вычисляя функцию v, мы можем пренебрегать произвольной постоянной. Легко понять, что это не сказывается на окончательном результате.

Пример 52. Вычислим интеграл $I=\int x\cdot e^{5x+2}dx$ по схеме, реализующей соотношение (26):

$$I=\int x\cdot e^{5x+2}dx=\left|\begin{array}{c} u=x\Rightarrow du=dx \\ dv=e^{5x+2}dx\Rightarrow v=\int e^{5x+2}dx=\frac{1}{5}e^{5x+2}\end{array}\right|=\frac{xe^{5x+2}}{5}-\int\frac{1}{5}e^{5x+2}dx=\frac{xe^{5x+2}}{5}-\frac{e^{5x+2}}{25}+C.$$

Лекция 10

Техника неопределенного интегрирования

Применение формулы замены переменной

1. Если, вычисляя неопределенный интеграл, можно сделать замену $t=f(x)$, однако под знаком неопределенного интеграла стоит выражение $k\cdot f(x)+b$, то целесообразно сразу сделать замену $t=k\cdot f(x)+b$.

Пример 53. Вычислим интеграл: $I=\int\frac{dx}{x(4\ln x+1)}$. Если пытаться применить формулу (24) в точности, как она записана, то можно сделать замену $t=\ln x$. Однако под интегралом стоит линейное выражение от этой функции, а именно $4\ln x+1$. Поэтому следует сделать замену $t=4\ln x+1$. Имеем:

$$I=\left|\begin{array}{c} t=4\ln x+1 \\ dt=\frac{4dx}{x}\Rightarrow\frac{dx}{x}=\frac{dt}{4}\end{array}\right|=\int\frac{dt}{4t}=\frac{1}{4}\int\frac{dt}{t}=\frac{1}{4}\ln|t|+C=\frac{1}{4}\ln|4\ln x+1|+C.$$

Пример 54.

$$\int\frac{e^x}{(3e^x+5)^2}dx=\left|\begin{array}{c} t=3e^x+5 \\ dt=3e^xdx\Rightarrow e^xdx=\frac{dt}{3}\end{array}\right|=\int\frac{dt}{3t^2}=\frac{1}{3}\int t^{-2}dt=\frac{1}{3}\cdot\frac{t^{-1}}{-1}+C=-\frac{1}{3(3e^x+5)}+C.$$

Пример 55.

$$\int\frac{\sqrt{8tgx-7}}{\cos^2x}dx=\left|\begin{array}{c} t=8tgx-7 \\ dt=\frac{8dx}{\cos^2x}\Rightarrow\frac{dx}{\cos^2x}=\frac{dt}{8}\end{array}\right|=\int\frac{\sqrt{t}}{8}dt=\frac{1}{8}\int t^{\frac{1}{2}}dt=\frac{1}{8}\cdot\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+C=\frac{(8tgx-7)^{\frac{3}{2}}}{12}+C.$$

Пример 56.

$$\int\frac{\cos(2-7\arcsin x)}{\sqrt{1-x^2}}dx=\left|\begin{array}{c} t=2-7\arcsin x \\ dt=\frac{-7dx}{\sqrt{1-x^2}}\Rightarrow\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=-\frac{dt}{7}\end{array}\right|=-\frac{1}{7}\int\cos tdt=-\frac{1}{7}\cdot\sin t+C=-\frac{1}{7}\cdot\sin(2-7\arcsin x)+C.$$

2. Важным частным случаем предыдущего пункта является интеграл вида: $\int g(kx^{n+1}+b)x^n dx$, где n – натуральное число. В соответствии со сказанным этот интеграл берется заменой $t=kx^{n+1}+b$.

Пример 57.

$$\int\frac{x^2dx}{\sin^2(1-6x^3)}=\left|\begin{array}{c} t=1-6x^3 \\ dt=-18x^2dx \Rightarrow x^2dx=-\dfrac{dt}{18}\end{array}\right|=-\frac{1}{18}\int\frac{dt}{\sin^2 t}=\frac{1}{18}\cdot ctgt+C=\frac{1}{18}\cdot ctg(1-6x^3)+C.$$

3. Вычислим интегралы вида: $\int tg^n xdx$ и $\int ctg^n xdx$, где n – натуральное число. При $n=1$ эти интегралы вычисляются просто:

$$\int tgxdx=\int\frac{\sin x}{\cos x}dx=\left|\begin{array}{c} t=\cos x \\ dt=-\sin xdx \Rightarrow \sin xdx=-dt\end{array}\right|=-\int\frac{dt}{t}=-\ln|t|+C=-\ln|\cos x|+C.$$

Аналогично, $\int ctgxdx=\ln|\sin x|+C$. При $n>1$ подынтегральные выражения преобразуются с помощью формул: $tg^2x=\dfrac{1}{\cos^2 x}-1,\ ctg^2x=\dfrac{1}{\sin^2 x}-1$.

Пример 58.

$$\int tg^5xdx=\int tg^3xtg^2xdx=\int tg^3x\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)dx=\int tg^3x\frac{dx}{\cos^2 x}-\int tg^3xdx=\int tg^3x\frac{dx}{\cos^2 x}-\int tgx\cdot tg^2xdx=$$

$$=\int tg^3x\frac{dx}{\cos^2 x}-\int tgx\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)dx=\int tg^3x\frac{dx}{\cos^2 x}-\int tgx\frac{dx}{\cos^2 x}+\int tgxdx.$$

Последний интеграл уже вычислен, а в первых двух делаем замену $t=tgx$. В итоге получаем:

$$\int tg^5xdx=\int t^3dt-\int tdt-\ln|\cos x|=\frac{t^4}{4}-\frac{t^2}{2}-\ln|\cos x|+C=\frac{tg^4x}{4}-\frac{tg^2x}{2}-\ln|\cos x|+C.$$

Применение формулы интегрирования по частям

1. Рассмотрим интегралы $\int P(x)\cdot e^{kx+b}dx$, $\int P(x)\cdot\sin(kx+b)dx$, $\int P(x)\cdot\cos(kx+b)dx$, где $P(x)$ есть некоторый многочлен. Эти интегралы вычисляются с помощью формулы (26), причем всегда полагают $u=P(x)$, а через dv

обозначаютостальное выражение, стоящее под знаком интеграла. Примеры 51 и 52 являются примерами интегралов данного типа.

Пример 59.

$$\int x^2e^{5x+2}dx=\left|\begin{array}{c} u=x^2\Rightarrow du=2xdx \\ dv=e^{5x+2}dx\Rightarrow v=\int e^{5x+2}dx=\frac{1}{5}e^{5x+2}\end{array}\right|=\frac{1}{5}x^2e^{5x+2}-\int\frac{1}{5}e^{5x+2}2xdx=\frac{1}{5}x^2e^{5x+2}-\frac{2}{5}\int xe^{5x+2}dx.$$

Последний интеграл вычислен нами в примере 52. Получаем:

$$\int x^2e^{5x+2}dx=\frac{1}{5}x^2e^{5x+2}-\frac{2}{25}xe^{5x+2}+\frac{2}{125}e^{5x+2}+C.$$

2. Рассмотрим интегралы следующего вида:

$\int P(x)\cdot\ln(kx+b)dx,$ $\int P(x)\cdot\arcsin(kx+b)dx$ $\int P(x)\cdot\arccos(kx+b)dx,$ $\int P(x)\cdot arctg(kx+b)dx,$ $\int P(x)\cdot arcctg(kx+b)dx.$ Эти интегралы также вычисляются с помощью формулы (26), причем всегда полагают $dv = P(x)dx$, а через u обозначают остальное выражение, стоящее под знаком интеграла.

Пример 60.

$$\int(7x+3)\ln xdx=\left|\begin{array}{c} u=\ln x\Rightarrow du=\frac{dx}{x} \\ dv=(7x+3)dx\Rightarrow v=\int(7x+3)dx=\frac{7x^2}{2}+3x\end{array}\right|=\left(\frac{7x^2}{2}+3x\right)\cdot\ln x-\int\left(\frac{7x^2}{2}+3x\right)\frac{dx}{x}=$$

$$=\left(\frac{7x^2}{2}+3x\right)\cdot\ln x-\int\left(\frac{7x}{2}+3\right)dx=\left(\frac{7x^2}{2}+3x\right)\cdot\ln x-\frac{7x^2}{4}-3x+C.$$

3. Интегралы вида $\int e^{k_1x+b_1}\sin(k_2x+b_2)dx$ и $\int e^{k_1x+b_1}\cos(k_2x+b_2)dx$ вычисляются двукратным интегрированием по частям. В результате этого двукратного интегрирования вновь получается исходный интеграл, затем оба интеграла переносятся в одну сторону, объединяются и выражаются из полученного уравнения.

Пример 61.

$$I=\int e^{2x}\cos(3x+2)dx=\left|\begin{array}{c} u=\cos(3x+2)\Rightarrow du=-3\sin(3x+2)dx \\ dv=e^{2x}dx\Rightarrow v=\int e^{2x}dx=\frac{1}{2}e^{2x}\end{array}\right|=\frac{1}{2}e^{2x}\cos(3x+2)+\frac{3}{2}\int e^{2x}\sin(3x+2)dx=$$

$$=\frac{1}{2}e^{2x}\cos(3x+2)+\left|\begin{array}{c} u=\sin(3x+2)\Rightarrow du=3\cos(3x+2)dx \\ dv=e^{2x}dx\Rightarrow v=\int e^{2x}dx=\frac{1}{2}e^{2x} \end{array}\right|+\frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}e^{2x}\sin(3x+2)-\frac{3}{2}\int e^{2x}\cos(3x+2)dx\right)=$$

$$=\frac{1}{2}e^{2x}\cos(3x+2)+\frac{3}{4}e^{2x}\sin(3x+2)-\frac{9}{4}\int e^{2x}\cos(3x+2)dx=\frac{1}{2}e^{2x}\cos(3x+2)+\frac{3}{4}e^{2x}\sin(3x+2)-\frac{9}{4}I.$$

В результате получили: $I=\frac{1}{2}e^{2x}\cos(3x+2)+\frac{3}{4}e^{2x}\sin(3x+2)-\frac{9}{4}\cdot I$. Решаем это уравнение относительно I:

$$\frac{13}{4}I=\frac{1}{2}e^{2x}\cos(3x+2)+\frac{3}{4}e^{2x}\sin(3x+2)\ \Rightarrow\ I=\frac{2}{13}e^{2x}\cos(3x+2)+\frac{3}{13}e^{2x}\sin(3x+2)+C$$

Лекция11

Конструкция и вычисление определенного интеграла

Конструкция определенного интеграла

Проведем пошаговую конструкцию определенного интеграла от функции $y=f(x)$, определенной на отрезке $[a,b]$, где $a<b$.

Шаг 1. Разобьем отрезок $[a,b]$ произвольным образом на n смежных отрезков с помощью точек дробления x_k (рис. 5). Очевидно, $\Delta x_k := x_k - x_{k-1}$ есть длина отрезка $[x_{k-1},x_k]$, $k=1,2,...,n$. Максимум длин всех полученных отрезков обозначим через d, т.е. $d=\max\limits_{k=1,2,...,n}\Delta x_k$. Это число называется диаметром полученного разбиения.

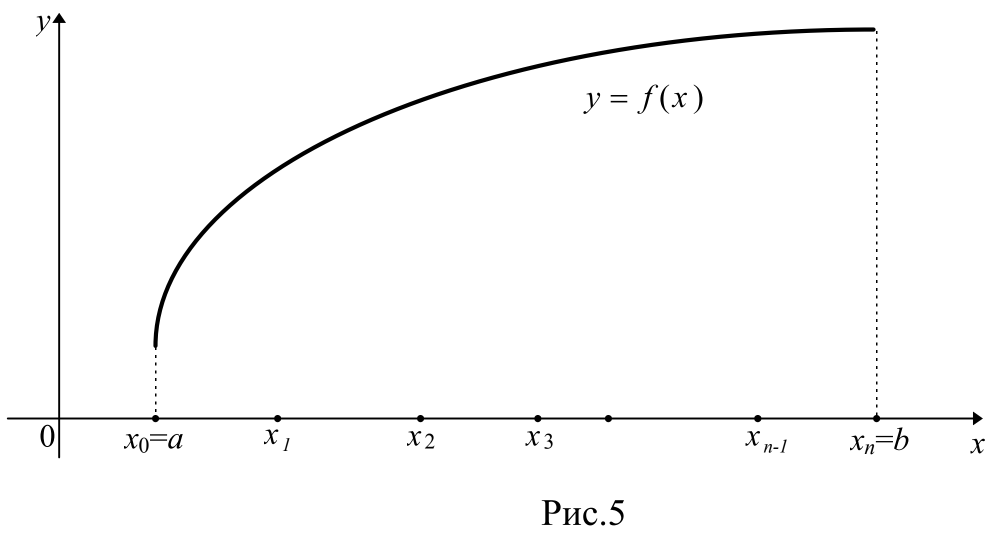


Рис.5

Шаг 2. На каждом из отрезков $\left[x_{k-1}, x_k\right]$ произвольным образом выберем точку ξ_k (рис. 6) и составим так называемую интегральную сумму:

$$S_n = f(\xi_1)\cdot \Delta x_1 + f(\xi_2)\cdot \Delta x_2 + ... + f(\xi_n)\cdot \Delta x_n = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\cdot \Delta x_k \ .$$

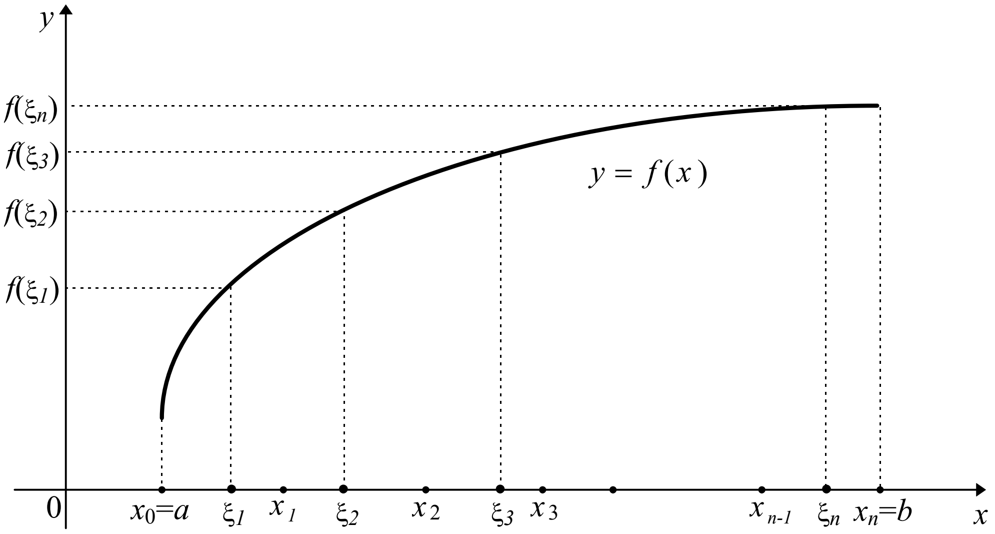


Рис. 6

Заметим, что взятые точки ξ_k могут совпадать с точками дробления.

Шаг 3. Переходим к пределу интегральной суммы, предполагая, что число точек дробления бесконечно возрастает таким образом, что диаметр разбиения d стремится к нулю (последнее условие обеспечивает последовательное равномерное измельчение всех интервалов дробления отрезка $[a,b]$).

Определение 35. Если предел $\lim\limits_{d\to 0} S_n$ существует и не зависит ни от способа дробления отрезка $[a,b]$, ни от выбора точек ξ_k, то этот предел называется ***определенным интегралом***функции $y = f(x)$ на отрезке $[a,b]$ и обозначается $\int\limits_a^b f(x)dx$, а функция называется интегрируемой на $[a,b]$. Число a называется нижним пределом данного интеграла, а число b – верхним пределом.

Таким образом, определение 35 выражается формулой:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{d\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\cdot \Delta x_k \ . \tag{27}$$

■

Теорема 22. Если функция $y=f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ существует.

■

Дополним определение 35 случаем, когда нижний предел определенного интеграла больше (или равен) верхнего предела. Для этого полагаем:

$$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx\,. \tag{28}$$

Из формулы (28) немедленно следует, что если нижний предел интеграла совпадает с верхним пределом (т.е. $a = b$), то этот интеграл равен нулю:

$$\int_a^a f(x)dx = 0\,. \tag{29}$$

Свойства определенного интеграла

Предположим, что функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ интегрируемы на отрезке $[a,b]$.

1. Пусть α и β – действительные числа. Тогда справедливо равенство

$$\int_a^b [\alpha \cdot f(x) + \beta \cdot g(x)]dx = \alpha\int_a^b f(x)dx + \beta\int_a^b g(x)dx\,, \tag{30}$$

которое выражает ***свойство линейности*** определенного интеграла.

2. Если $f(x) \ge 0$ для всех $x \in [a,b]$, то

$$\int_a^b f(x)dx \ge 0\,. \tag{31}$$

(***свойство позитивности*** определенного интеграла).

3. Если $f(x) \ge g(x)$ для всех $x \in [a,b]$, то

$$\int_a^b f(x)dx \ge \int_a^b g(x)dx\,. \tag{32}$$

(***свойство монотонности*** определенного интеграла).

4. Справедливо следующее ***свойство нормировки*** определенного интеграла:

$$\int_a^b dx := \int_a^b 1dx = b - a\,. \tag{33}$$

5. Пусть для всех $x \in [a,b]$ $m \le f(x) \le M$, где m и M – действительные числа. Тогда справедлива следующая ***оценка определенного интеграла***:

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a). \tag{34}$$

6. Справедлива ***теорема о среднем значении*** определенного интеграла: если функция $y=f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то существует такая точка $\xi \in (a,b)$, что

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = f(\xi). \tag{35}$$

7. Пусть точки a, b и c лежат в интервале, на котором функция $y=f(x)$ интегрируема. Тогда справедливо следующее ***свойство аддитивности*** определенного интеграла:

$$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx. \tag{36}$$

Вычисление определенных интегралов

В этом разделе мы будем предполагать, что рассматриваемая функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ и, следовательно, по теореме 21 интеграл $\int_a^b f(x)dx$ существует. Для удобства мы часто будем одну букву, обозначающую переменную интегрирования, заменять другой. Например, вместо $\int_a^b f(x)dx$ будем писать $\int_a^b f(t)dt$, что не изменяет значения интеграла (см. конструкцию определенного интеграла).

Теорема 23 (о производной от интеграла с переменным верхним пределом). Функция $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ и дифференцируема на интервале (a,b). При этом для $x \in (a,b)$ справедлива формула:

$$\Phi'(x) = f(x), \tag{37}$$

т.е. функция $\Phi(x)$ является первообразной функции $f(x)$ на интервале (a,b).

■

Теорема 24. (формула Ньютона-Лейбница). Если функция $F(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, а на интервале (a,b) является первообразной функции $f(x)$, то справедлива следующая формула Ньютона-Лейбница:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a) \tag{38}$$

(выражение в середине формулы (38) есть лишь иная запись выражения, стоящего справа).

■

Пример 62. Вычислим интеграл $I = \int_1^3 \left(x + \frac{3}{\sqrt{x}} - \frac{5}{x} \right) dx$. Имеем:

$$I = \int_1^3 \left(x + \frac{3}{\sqrt{x}} - \frac{5}{x} \right) dx = \int_1^3 x dx + 3\int_1^3 x^{-\frac{1}{2}} dx - 5\int_1^3 \frac{dx}{x} = \frac{x^2}{2}\Big|_1^3 + 6x^{\frac{1}{2}}\Big|_1^3 - 5\ln x\Big|_1^3 =$$

$$= \frac{9}{2} - \frac{1}{2} + 6\sqrt{3} - 6 - 5\ln 3 + 5\ln 1 = 6\sqrt{3} - 2 - 5\ln 3 .$$

Теорема 25 (формула замены переменной в определенном интеграле). Пусть функция $x = \varphi(t)$ имеет производную во всех точках отрезка $[\alpha,\beta]$ и отображает этот отрезок на отрезок $[a,b]$ таким образом, что $a = \varphi(\alpha)$ и $b = \varphi(\beta)$. Тогда

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int_a^b f(x)dx . \tag{39}$$

■

Пример 63. Вычислим интеграл $I = \int_0^1 t\sqrt{1+t^2}\,dt$. Применим формулу (39):

$$I = \int_0^1 t\sqrt{1+t^2}\,dt = \left| \begin{array}{c} 1+t^2 = x \Rightarrow 2tdt = dx \\ \Rightarrow tdt = \frac{1}{2}dx; \\ t = 0 \rightarrow x = 1 \\ t = 1 \rightarrow x = 2 \end{array} \right| = \int_1^2 \sqrt{x} \cdot \frac{1}{2} dx = \frac{1}{3} x^{\frac{3}{2}} \Big|_1^2 = \frac{1}{3}\left(2\sqrt{2} - 1\right).$$

Теорема 26(формула интегрирования по частям в определенном интеграле). Пусть функции $u(x)$ и $v(x)$ имеют производные во всех точках отрезка $[a,b]$. Тогда:

$$\int_a^b u dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v du \,. \tag{40}$$

■

Пример 64. Вычислим интеграл $I = \int_0^1 xe^{2x} dx$. Применим формулу (40):

$$I = \int_0^1 xe^{2x} dx = \left| \begin{array}{c} u = x \Rightarrow du = dx; \\ dv = e^{2x} dx \Rightarrow \\ v = \int e^{2x} dx = \frac{1}{2} e^{2x} \end{array} \right| = \frac{1}{2} xe^{2x} \Big|_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 e^{2x} dx = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{4} e^{2x} \Big|_0^1 = \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{e^2+1}{4}.$$

Лекция12

Применение определенного интеграла. Двойной интеграл.

Применение определенного интеграла к вычислению площадей, объемов и длин

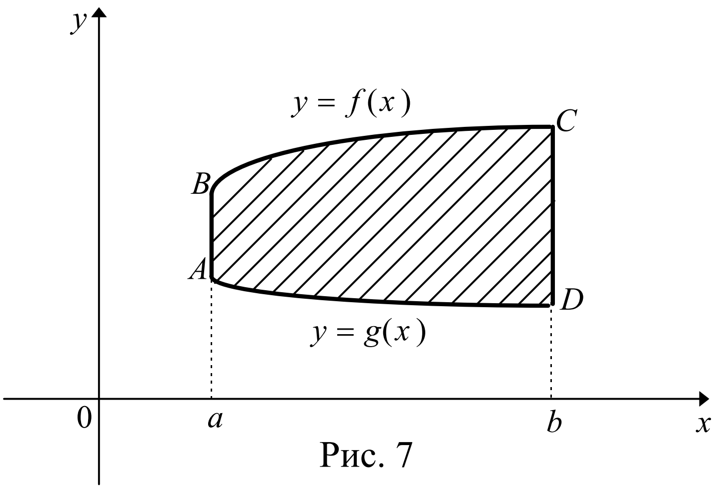


Рис. 7

Теорема 27. Пусть функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ непрерывны на отрезке $[a,b]$, причем $f(x) \ge g(x)$ для всех $x \in [a,b]$. Тогда площадь фигуры *ABCD* (рис.7), ограниченной графиками функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$, а также прямыми $x = a$ и $x = b$, вычисляется по формуле:

$$S_{ABCD} = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx \,. \tag{41}$$

■

Заметим, что теорема 27 сохраняет силу и в случае, когда функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ кусочно-непрерывны на отрезке $[a,b]$.

Пример 65. Вычислим площадь плоской фигуры, ограниченной линиями $y = 4 - x^2$ и $y = \frac{3}{2}x - 3$ (рис. 8).

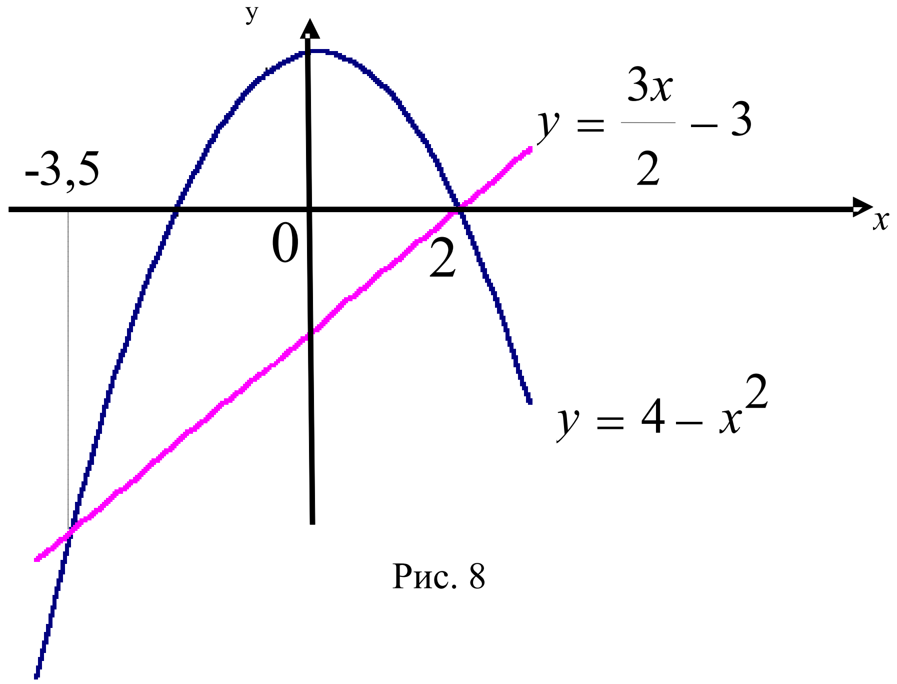


Рис. 8

В данном случае $g(x) = \frac{3}{2} \cdot x - 3$ – прямая, а $f(x) = 4 - x^2$ – парабола. На рис. 8 представлены графики этих функций. Найдем абсциссы a и b точек пересечения данных линий, для чего решим уравнение $g(x) = f(x)$:

$$\frac{3}{2} \cdot x - 3 = 4 - x^2 \Rightarrow x^2 + \frac{3}{2} \cdot x - 7 = 0 \Rightarrow 2x^2 + 3x - 14 = 0 \Rightarrow$$

$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 112}}{4} = \frac{-3 \pm 11}{4} \Rightarrow x_1 = -\frac{7}{2} = a, x_2 = 2 = b.$$

Применяя теперь формулу (40), найдем искомую площадь:

$$S = \int_{-\frac{7}{2}}^{2} \left[(4 - x^2) - (\frac{3}{2}x - 3) \right] dx = \int_{-\frac{7}{2}}^{2} (-x^2 - \frac{3}{2}x + 7) dx = \left(-\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{4} + 7x \right) \Bigg|_{-\frac{7}{2}}^{2} =$$

$$= \left(-\frac{2^3}{3} - \frac{3 \cdot 2^2}{4} + 7 \cdot 2 \right) - \left(-\frac{1}{3}\left(-\frac{7}{2}\right)^3 - \frac{3}{4}\left(-\frac{7}{2}\right)^2 + 7\left(-\frac{7}{2}\right) \right) = \frac{1331}{48}.$$

Область *ABCD*, о которой говорится в теореме 27, «хорошо проектируется» на ось Ox. Такие области мы будем называть областями 1-го типа. Аналогичная теорема верна для областей 2-го типа, которые хорошо проектируются на ось Oy.

Теорема 27[*]. Пусть функции $x=\varphi(y)$ и $x=\psi(y)$ непрерывны на отрезке $[c,d]$, причем $\varphi(y)\geq\psi(y)$ для всех $y\in[c,d]$. Тогда площадь фигуры, ограниченной графиками функций $x=\varphi(y)$ и $x=\psi(y)$, а также прямыми $y=c$ и $y=d$, вычисляется по формуле:

$$S=\int_c^d[\varphi(y)-\psi(y)]dy. \tag{42}$$

■

Теорема 28. Объем тела вращения, получающегося от вращения вокруг оси Ox криволинейной трапеции *aABb*, где AB – дуга кривой $y=f(x)$, вычисляется по формуле:

$$V_{Ox}=\pi\int_a^b[f(x)]^2dx. \tag{43}$$

Объем тела, образованного вращением вокруг оси *Oy*криволинейной трапеции *cABd*, где *AB* – дуга кривой $x=\varphi(y)$ (рис. 9), определяется формулой:

$$V_{Oy}=\pi\int_c^d[\varphi(y)]^2dy. \tag{44}$$

■

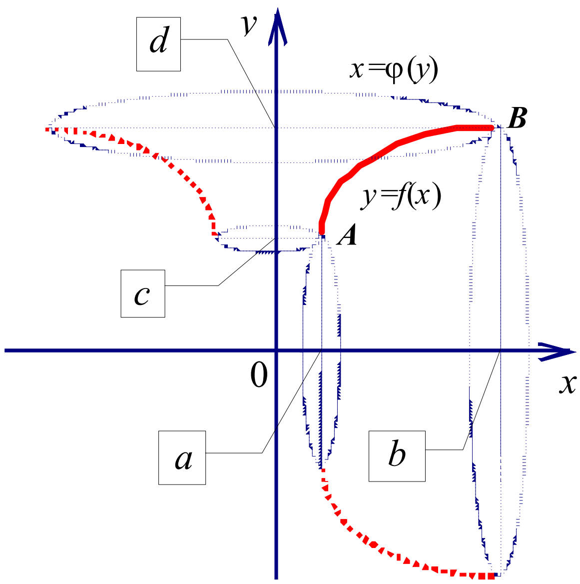


Рис. 9

Пример 66. Вычислим объем тела, полученного вращением вокруг оси Ox параболы $y=\sqrt{x+4}$, $-4\le x\le 0$ (рис. 10).

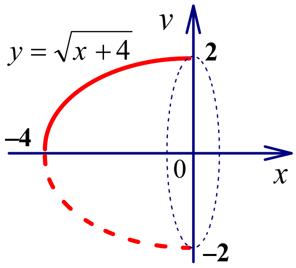


Рис. 10

Для вычисления объема тела вращения воспользуемся формулой (43):

$$V_{Ox}=\pi\int_{-4}^{0}\left[\sqrt{x+4}\right]^2dx=\pi\left[\frac{x^2}{2}+4x\right]\Bigg|_{-4}^{0}=8\pi.$$

Пример 67. Вычислим объем тела, полученного вращением вокруг оси Oy полукубической параболы $x=\sqrt{y^3}$, $0\le y\le 1$ (рис. 11).

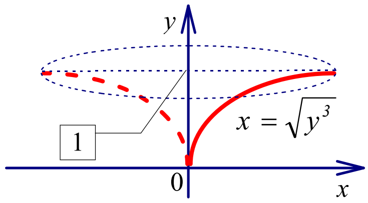


Рис. 11

В данном случае применяем формулу (44):

$$V_{Oy}=\pi\int_{0}^{1}\left[\sqrt{y^3}\right]^2dy=\pi\int_{0}^{1}y^3dy=\pi\frac{y^4}{4}\Bigg|_{0}^{1}=\frac{\pi}{4}.$$

Теорема 29. Рассмотрим параметрические уравнения дуги некоторой пространственной кривой:

$$\begin{cases} x=x(t); \\ y=y(t),\ t_1\le t\le t_2; \\ z=z(t). \end{cases}$$

Длина l данной дуги вычисляется по формуле:

$$l=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{\left[x'(t)\right]^2+\left[y'(t)\right]^2+\left[z'(t)\right]^2}\,dt. \qquad (45)$$

Та же формула (45), в которой следует положить $z(t) \equiv 0$, сохраняется и для длины дуги плоской кривой.

Если уравнение плоской кривой задается в декартовых координатах $y = f(x), a \le x \le b$, то длина дуги вычисляется по формуле:

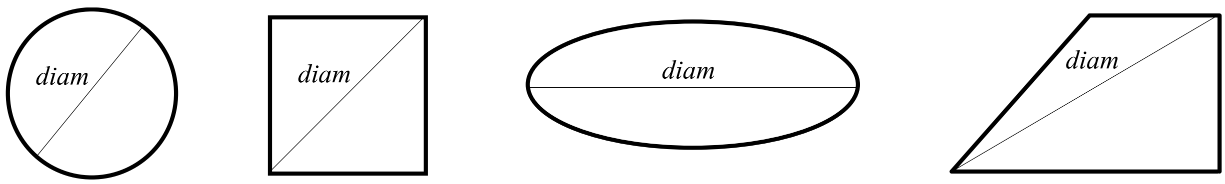
$$l = \int_a^b \sqrt{1 + \left[f^{/}(x)\right]^2}\, dx\,. \tag{46}$$

■

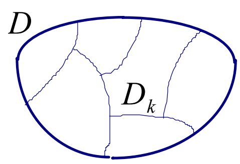
Конструкция двойного интеграла

Проведем пошаговую конструкцию двойного интеграла от функции двух переменных $F(x, y)$, определенной в ограниченной замкнутой области $D \subset R^2$ (эта конструкция совершенно аналогична конструкции определенного интеграла).

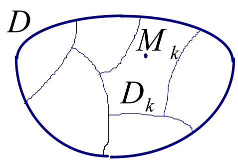
Диаметром области D (обозначается $diam(D)$) будем называть максимум расстояний между точками, пробегающими одна независимо от другой область D:



Площадь области D мы будем обозначать через $\mu(D)$.



Шаг 1. Разобьем область D произвольным образом на nподобластей $D_1, D_2, ..., D_n$, которые могут пересекаться только своими границами (см. рисунок). Максимум диаметров областей $D_1, D_2, ..., D_n$ обозначим через d, т.е. $d = \max\limits_{k=1,2,...,n} diam(D_k)$. Это число называется диаметром полученного разбиения.



Шаг 2. В каждой из подобластей D_k произвольным образом выберем точку $M_k(x_k, y_k)$ (см. второй рисунок) и составим интегральную сумму:

$$S_n = F(x_1, y_1) \cdot \mu(D_1) + F(x_2, y_2) \cdot \mu(D_2) + . \;.\; . + F(x_n, y_n) \cdot \mu(D_n) = \sum_{k=1}^{n} F(x_k, y_k) \cdot \mu(D_k)\,.$$

Шаг 3. Переходим к пределу интегральной суммы, предполагая, что число подобластей дробления бесконечно возрастает таким образом, что диаметр разбиения d стремится к нулю (последнее условие обеспечивает последовательное равномерное измельчение всех подобластей дробления области D).

Определение 36. Если предел $\lim\limits_{d\to 0} S_n$ существует и не зависит ни от способа дробления области D, ни от выбора точек $M_k(x_k, y_k)$, то этот предел называется ***двойным интегралом*** функции $F(x,y)$ по области D и обозначается $\iint\limits_D F(x,y)dxdy$.

Таким образом, определение 36 выражается формулой:

$$\iint\limits_D F(x,y)dxdy = \lim_{d\to 0}\sum_{k=1}^{n} F(x_k, y_k)\cdot \mu(D_k) \qquad (47)$$

■

Теорема30. Если функция $F(x,y)$ непрерывна в области D, то двойной интеграл $\iint\limits_D F(x,y)dxdy$ существует.

Все семь свойств, которые мы сформулировали для определенного интеграла, легко модифицируются в свойства двойного интеграла.

■

Сведение двойного интеграла к повторному

Теорема 31. Пусть область $D\subset R^2$ является областью 1-го типа и задается неравенствами: $D:\begin{cases} a\le x\le b \\ g(x)\le y\le f(x)\end{cases}$ (рис. 7). Если интеграл $\iint\limits_D F(x,y)dxdy$ существует, то справедлива следующая формула сведения двойного интеграла к повторному:

$$\iint\limits_D F(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dx\int\limits_{g(x)}^{f(x)} F(x,y)dy\,. \qquad (48)$$

■

Дадим некоторые пояснения к формуле (48). При вычислении повторного интеграла справа сначала вычисляется внутренний интеграл $\int\limits_{g(x)}^{f(x)} F(x,y)dy$. При этом (на время вычисления внутреннего интеграла) переменная x фиксируется, т.е. с ней нужно обращаться как с постоянной величиной. Интегрирование же производится по переменной y. Вычислив внутренний интеграл, мы «расфиксируем» x, которая вновь становится переменной. В заключение мы вычисляем внешний интеграл (он берется по переменной x), т.е. вычисляем интеграл $\int\limits_a^b \left[\int\limits_{g(x)}^{f(x)} F(x,y)dy \right] dx$. Это уже делается обычным способом, так как выражение внутри квадратных скобок представляет собой функцию одной переменной x.

Пример 68. Вычислим двойной интеграл $\iint\limits_D xydxdy$, где D – множество точек плоскости, задающееся следующими условиями:
$D = \{(x, y): y \geq 0, (x-2)^2 + y^2 \leq 1\}$.

Рассмотрим рис. 12.

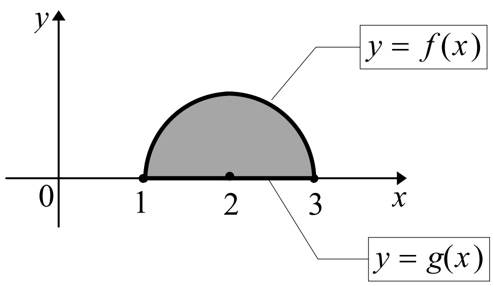


Рис. 12

Здесь $a = 1, b = 3, g(x) = 0$. Для нахождения верхней ограничивающей область функции $f(x)$ нужно разрешить относительно y уравнение $(x-2)^2 + y^2 = 1$. Имеем:
$y^2 = 1-(x-2)^2, y = +\sqrt{-x^2+4x-3} = f(x)$
(значение корня взято со знаком плюс, так как из описания области следует неравенство $f(x) \geq 0$).Итак, область D можно рассматривать как область 1-го типа: $D: \begin{cases} 1 \leq x \leq 3 \\ 0 \leq y \leq \sqrt{-x^2+4x-3} \end{cases}$. Применяя формулу (47), получаем:

$$\iint\limits_D xydxdy = \int\limits_1^3 dx \int\limits_0^{\sqrt{-x^2+4x-3}} xydy = \int\limits_1^3 dx \cdot x \int\limits_0^{\sqrt{-x^2+4x-3}} ydy = \int\limits_1^3 dx \cdot x \frac{y^2}{2}\Bigg|_0^{\sqrt{-x^2+4x-3}} = \int\limits_1^3 \frac{x}{2}\left(-x^2+4x-3\right)dx =$$

$$=\int_1^3\left(-\frac{x^3}{2}+2x^2-\frac{3}{2}x\right)dx=\left(-\frac{x^4}{8}+\frac{2}{3}x^3-\frac{3}{4}x^2\right)\Bigg|_1^3=\frac{4}{3}.$$

*Теорема 31**. Если область D есть область 2-го типа (см. теорему 27*), т.е. $D:\begin{cases} c\le y\le d \\ \psi(y)\le x\le\varphi(y)\end{cases}$, и интеграл $\iint_D F(x,y)dxdy$ существует, то справедлива следующая формула сведения двойного интеграла к повторному:

$$\iint_D F(x,y)dxdy=\int_c^d dy\int_{\psi(y)}^{\varphi(y)}F(x,y)dx. \qquad (49)$$

■

Пример 69. Вычислим двойной интеграл $\iint_D \frac{x}{y}dxdy$, где $D:\begin{cases} 2\le y\le 4 \\ y\le x\le 2y\end{cases}$.

Рассмотрим рис. 13.

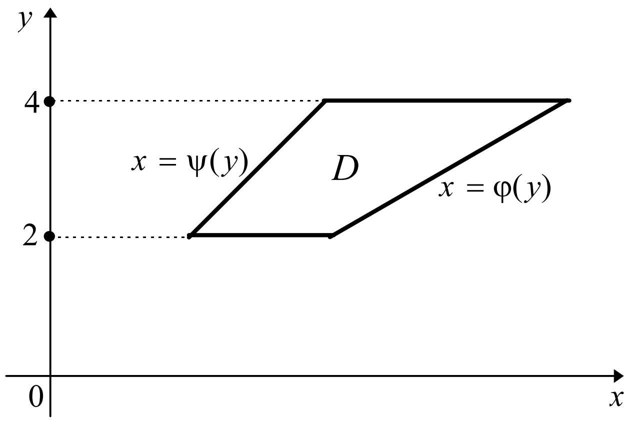


Рис. 13

Обозначим

$$c=2, d=4, \psi(y)=y, \varphi(y)=2y.$$

Применяя формулу (49), получаем:

$$\iint_D \frac{x}{y}dxdy=\int_2^4 dy\int_y^{2y}\frac{x}{y}dx=\int_2^4 dy\cdot\frac{1}{y}\int_y^{2y}xdx=$$

$$=\int_2^4 dy\cdot\frac{1}{y}\cdot\frac{x^2}{2}\Bigg|_y^{2y}=\int_2^4\frac{1}{2y}\cdot\left(4y^2-y^2\right)dy=$$

$$=\frac{3}{2}\int_2^4 ydy=\frac{3}{4}y^2\Bigg|_2^4=\frac{3}{4}(16-4)=9.$$

РАЗДЕЛ 4. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Лекция13

Основные определения

*Определение 37.**Обыкновенным дифференциальным уравнением*** (кратко д.у.) 1-го порядка называется уравнение вида:

$$F\left(x, y, y'\right) = 0, \qquad (50)$$

в котором x – независимая переменная, $y = y(x)$ – искомая функция, $y' = y'(x)$ – ее производная, а F – заданная функция трех переменных, определенная в некоторой области пространства R^3.

■

Определение 38. Если из уравнения (50) можно выразить y', то это уравнение записывается в виде

$$y' = f(x, y), \qquad (50')$$

или, что то же самое, следующим образом:

$$dy = f(x, y)dx \qquad (50'')$$

(предполагается, что функция $f(x,y)$ определена в некоторой области пространства R^2). Д.у. (50′) и (50″) называются дифференциальными уравнениями 1-го порядка, разрешенными относительно производной.

■

Определение 39. ***Решением*** д.у. (50), а также д.у. (50′) и (50″), называется функция $y = y(x)$, определенная и дифференцируемая на некотором интервале (a,b), которая, будучи подставлена в данные уравнения, превращает их в тождества (на (a,b), соответственно, выполняются тождества $F\left(x, y(x), y'(x)\right) \equiv 0$, $y'(x) \equiv f\left(x, y(x)\right)$ или $dy(x) \equiv f\left(x, y(x)\right)dx$). ***Общим решением*** д.у. (50), (50′) и (50″) называется функция

$$y = \varphi(x, C), \qquad (51)$$

удовлетворяющая условиям:

а) она является решением д.у. при любом конкретном значении параметра C (он называется произвольной постоянной);

б) для любой точки $\left(x_0, y_0\right)$ из области определения функции $f(x, y)$ найдется такое значение $C = C_0$, что функция $y = \varphi(x, C)$ удовлетворяет соотношению:

$$y_0 = \varphi(x_0, C_0).$$

Нахождение такого $C = C_0$ по условию $y_0 = \varphi(x_0, C_0)$ называется ***решением задачи Коши*** с начальными данными (x_0, y_0). Найденную таким образом функцию $y = \varphi(x, C_0)$ называют ***частным решением*** д.у., удовлетворяющим начальным данным (x_0, y_0).

Если решая д.у. 1-го порядка, мы получаем обычное уравнение вида $\Phi(x, y, C) = 0$, разрешив которое относительно y можно получить общее решение исходного д.у., то выражение $\Phi(x, y, C) = 0$ называют ***общим интегралом*** дифференциального уравнения.

■

Уравнения с разделяющимися переменными, однородные уравнения, линейные уравнения, уравнения Бернулли

1. ***Д.у. с разделяющимися переменными*** называется уравнение вида:

$$y' = f_1(x) \cdot f_2(y), \tag{52}$$

которое с помощью дифференциалов часто записывают так:

$$M_1(x) \cdot M_2(y)dx + N_1(x) \cdot N_2(y)dy = 0 \tag{52'}$$

(для простоты мы всегда будем предполагать, что функции $N_1(x)$ и $M_2(y)$ рассматриваются на тех интервалах, на которых они не обращаются в нуль, а применяемые равносильные преобразования относятся именно к этим интервалам).

Разделим переменные:

$$\frac{M_1(x)}{N_1(x)}dx = -\frac{N_2(y)}{M_2(y)}dy.$$

Последнее уравнение решается взятием интегралов от левой и правой частей:

$$\int \frac{M_1(x)}{N_1(x)}dx = -\int \frac{N_2(y)}{M_2(y)}dy.$$

Произвольная постоянная C появляется после вычисления этих интегралов.

Пример 70. Решим д.у.

$$4ydx - x(y-3)dy = 0 .$$

Разделим переменные, поделив обе части уравнения на xy. Получим:

$$\frac{4}{x}dx - \frac{y-3}{y}dy = 0 \Leftrightarrow \frac{4}{x}dx = \frac{y-3}{y}dy .$$

Интегрируем обе части полученного уравнения и вычисляем интегралы:

$$\int \frac{4}{x}dx = \int \frac{y-3}{y}dy \Leftrightarrow 4\int \frac{dx}{x} = \int dy - 3\int \frac{dy}{y} \Leftrightarrow 4\,\mathbf{ln}\,|\,x\,| + C = y - 3\,\mathbf{ln}\,|\,y\,|.$$

Полученное равенство есть общий интеграл исходного уравнения. Заметим, что произвольную постоянную C принято записывать в той стороне д.у. с разделяющимися переменными, в которой находится независимая переменная x.

Пример 71. Решим д.у.

$$y' = e^{2x+3y} .$$

Разделим переменные:

$$\frac{dy}{dx} = e^{2x} \cdot e^{3y} \Leftrightarrow \frac{dy}{e^{3y}} = e^{2x}dx \Leftrightarrow \int \frac{dy}{e^{3y}} = \int e^{2x}dx \Leftrightarrow \int e^{-3y}dy = \int e^{2x}dx \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\frac{e^{-3y}}{3} = \frac{e^{2x}}{2} + C \Leftrightarrow e^{-3y} = -\frac{3e^{2x}}{2} - 3C \Leftrightarrow -3y = \mathbf{ln}\left(-\frac{3e^{2x}}{2} - 3C\right) \Leftrightarrow y = -\frac{1}{3}\mathbf{ln}\left(-\frac{3e^{2x}}{2} - 3C\right).$$

Пример 72.Решим дифференциальное уравнение: $y'e^{x} = y\ln^2 y$.

Преобразуем данное уравнение: $y' = \dfrac{y\,\mathbf{ln}^2 y}{e^{x}}$. Разделим переменные:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y\,\mathbf{ln}^2 y}{e^{x}} \Leftrightarrow \frac{dy}{y\,\mathbf{ln}^2 y} = \frac{dx}{e^{x}} \Leftrightarrow \int \frac{dy}{y\,\mathbf{ln}^2 y} = \int e^{-x}dx .$$

Вычислим первый интеграл:

$$\int \frac{dy}{y\,\mathbf{ln}^2 y} = \left| \begin{array}{l} \mathbf{ln}\,y = t \\ \dfrac{1}{y}dy = dt \end{array} \right| = \int \frac{dt}{t^2} = \int t^{-2}dt = -t^{-1} + C = -\frac{1}{\mathbf{ln}\,y} + C .$$

Таким образом, получаем:

$$-\frac{1}{\ln y}=-e^{-x}+C \Leftrightarrow \ln y=\frac{1}{e^{-x}-C} \Leftrightarrow y=e^{\left(\frac{1}{e^{-x}-C}\right)}.$$

2. ***Однородным д.у.*** называется уравнение вида

$$y'=f\left(\frac{y}{x}\right). \tag{52}$$

Для решения этого уравнения вместо переменной y вводят переменную z по формуле $y=z\cdot x$, из которой следует, что $y'=z'\cdot x+z\cdot x'=z'\cdot x+z$. Подставляя эти выражения в уравнение (52), получаем д.у. вида:

$$z'\cdot x+z=f(z) \Leftrightarrow z'\cdot x=f(z)-z.$$

Деля обе части полученного уравнения на x, получаем уравнение с разделяющимися переменными для нахождения функции z.

Пример 73. Предполагая, что $x>0$ и $x^2-y^2>0$, решим уравнение

$$x\cdot dy-\left(y+\sqrt{x^2-y^2}\right)dx=0.$$

Имеем:

$$x\cdot dy=\left(y+\sqrt{x^2-y^2}\right)dx \Leftrightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{y+\sqrt{x^2-y^2}}{x} \Leftrightarrow y'=\frac{y}{x}+\sqrt{1-\left(\frac{y}{x}\right)^2}.$$

Полученное уравнение имеет вид (52). Применяя описанную выше замену, получаем:

$$z'\cdot x+z=z+\sqrt{1-z^2} \Rightarrow z'\cdot x=\sqrt{1-z^2} \Rightarrow \frac{dz}{dx}\cdot x=\sqrt{1-z^2} \Rightarrow \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}=\frac{dx}{x}.$$

В этом уравнении переменные разделены, следовательно, можно брать интегралы от левой и правой частей:

$$\int\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}=\int\frac{dx}{x} \Leftrightarrow \arcsin z=\ln|x|+C \Leftrightarrow \arcsin\frac{y}{x}=\ln|x|+C.$$

Последнее выражение есть общий интеграл исходногод.у.

Заметим, что д.у. из примера 73 аналогично решается при условиях $x<0$ и $x^2-y^2>0$ (читателю предоставляется решить это уравнение и получить общий интеграл $-\mathbf{arcsin}\dfrac{y}{x}=\mathbf{ln}\,|\,x\,|+C$). Если же допустить возможность равенства $x^2-y^2=0$, то легко проверить, что функции $y=x$ и $y=-x$ также являются (***особыми***) решениями данного д.у., хотя и не содержатся ни в одном из полученных общих интегралов. Мы будем игнорировать упомянутые детали.

Пример 74. Решим дифференциальное уравнение: $xy'=xe^{-\frac{y}{x}}+y$.

Разделим обе части уравнения на x. Исходное уравнение примет вид (52):

$$y'=e^{-\frac{y}{x}}+\frac{y}{x}.$$

Введем следующую замену: $\dfrac{y}{x}=z,\quad y'=z'x+z$.

Тогда получим:

$$z'x+z=e^{-z}+z\Rightarrow z'=\frac{e^{-z}}{x}\Rightarrow\frac{dz}{dx}=\frac{e^{-z}}{x}\Rightarrow e^{z}dz=\frac{dx}{x}\Rightarrow\int e^{z}dz=\int\frac{dx}{x}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow e^{z}=\ln|x|+C\Rightarrow z=\mathbf{ln}\big(\mathbf{ln}|x|+C\big).$$

Общее решение имеет вид: $y=x\,\mathbf{ln}\big(\mathbf{ln}|x|+C\big)$.

3.***Уравнением Бернулли*** называется д.у. вида

$$y'+p(x)\cdot y=q(x)\cdot y^{n}. \tag{53}$$

Если $n=0$, то уравнение (53) обычно называют ***линейным неоднородным уравнением 1-го порядка*** в случае, если $q(x)\neq 0$, и ***линейным однородным уравнением 1-го порядка*** в случае, если $q(x)\equiv 0$ (последний термин не имеет никакого отношения к однородному уравнению вида (52)).Чаще всего уравнение Бернулли решают с помощью факторизации зависимой переменной. А именно, запишем зависимую переменную y в виде $y=u(x)\cdot v(x)$, где $v>0$ – это конкретная функция, которую мы будем выбирать так, как нам удобно, а u вводится вместо y (фактически

u автоматически получается как $\dfrac{y}{v}$). Имеем: $y' = u' \cdot v + u \cdot v'$. Подставляя замены для y и y' в уравнение (53), получаем:

$$u' \cdot v + u \cdot v' + p(x) \cdot u \cdot v = q(x) \cdot u^n \cdot v^n \Leftrightarrow u' \cdot v + u\left[v' + p(x) \cdot v\right] = q(x) \cdot u^n \cdot v^n$$

Выбираем функцию v таким образом, чтобы выражение в квадратных скобках $v' + p(x) \cdot v$ обратилось в нуль, т.е. решаем относительно v уравнение с разделяющимися переменными:

$$v' + p(x) \cdot v = 0 \Leftrightarrow \frac{dv}{dx} = -p(x) \cdot v \Leftrightarrow \frac{dv}{v} = -p(x)dx \Leftrightarrow \int \frac{dv}{v} = -\int p(x)dx \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{ln}\,|\,v\,| = -\int p(x)dx \Leftrightarrow v = e^{-\int p(x)dx}.$$

При таком выборе v член, содержащий квадратные скобки, пропадает и уравнение (в предположении, что $u \neq 0$) принимает вид:

$$u' \cdot v = q(x) \cdot u^n \cdot v^n \Leftrightarrow \frac{du}{dx} = q(x) \cdot u^n \cdot v^{n-1} \Leftrightarrow u^{-n}du = q(x)v^{n-1}dx.$$

Так как $v = e^{-\int p(x)dx}$, то мы получили уравнение с разделяющимися переменными для нахождения функции u.

Заметим, что при $n > 0$ равенство $u = 0$ дает функцию $y = 0$, которая в этом случае также является (особым) решением уравнения (53).

Пример 75. Решим уравнение Бернулли $y' - 2xy = -xy^4$. В соответствии с вышеописанной схемой разобьем решение этого уравнения на несколько этапов.

Этап а):

$$y = u \cdot v, y' = u'v + uv' \Rightarrow u'v + uv' - 2xuv = -xu^4v^4 \Leftrightarrow u'v + u\left[v' - 2xv\right] = -xu^4v^4.$$

Этап б):

$$v' - 2xv = 0 \Leftrightarrow \frac{dv}{dx} = 2xv \Leftrightarrow \frac{dv}{v} = 2xdx \Leftrightarrow \int \frac{dv}{v} = 2\int xdx \Leftrightarrow \mathbf{ln}\,|\,v\,| = x^2 \Leftrightarrow v = e^{x^2}.$$

Заметим, что при вычислении v мы не учитываем произвольную постоянную, так как согласно общей методике достаточно иметь одну функцию v, обращающую в нуль квадратные скобки.

Этап в):

$$u' \cdot e^{x^2} = -xu^4 e^{4x^2} \Leftrightarrow \frac{du}{dx} = -xu^4 e^{3x^2} \Leftrightarrow u^{-4}du = -xe^{3x^2}dx \Leftrightarrow \int u^{-4}du = -\int xe^{3x^2}dx.$$

Вычислим второй интеграл:

$$\int xe^{3x^2}dx = \left| \begin{matrix} t = 3x^2, \\ dt = 6xdx \Rightarrow xdx = \frac{1}{6}dt \end{matrix} \right| = \frac{1}{6}\int e^t dt = \frac{e^t}{6} + C = \frac{e^{3x^2}}{6} + C.$$

Таким образом, получаем:

$$\frac{u^{-3}}{-3} = -\frac{e^{3x^2}}{6} - C \Rightarrow \frac{1}{u^3} = \frac{e^{3x^2}}{2} + 3C \Rightarrow u^3 = \frac{2}{e^{3x^2} + 6C} \Rightarrow u = \sqrt[3]{\frac{2}{e^{3x^2} + 6C}}.$$

Этап г): Общее решение имеет вид: $y = e^{x^2} \cdot \sqrt[3]{\dfrac{2}{e^{3x^2} + 6C}}$.

Пример 76. Решим уравнение $y' + y = (\mathbf{cos}\, x - \mathbf{sin}\, x)y^2$. Это также уравнение Бернулли.

а) $y = u \cdot v,\ y' = u'v + uv' \Rightarrow u'v + uv' + uv = (\mathbf{cos}\, x - \mathbf{sin}\, x)u^2v^2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow u'v + u[v' + v] = (\mathbf{cos}\, x - \mathbf{sin}\, x)u^2v^2.$$

б) $v' + v = 0 \Leftrightarrow \dfrac{dv}{dx} = -v \Leftrightarrow \dfrac{dv}{v} = -dx \Leftrightarrow \mathbf{ln}\,|\,v\,| = -x \Leftrightarrow v = e^{-x}$.

в) $u'e^{-x} = (\mathbf{cos}\, x - \mathbf{sin}\, x)u^2e^{-2x} \Leftrightarrow \dfrac{du}{dx} = (\mathbf{cos}\, x - \mathbf{sin}\, x)u^2e^{-x} \Leftrightarrow$

$$u^{-2}du = (\mathbf{cos}\, x - \mathbf{sin}\, x)e^{-x}dx \Leftrightarrow \int u^{-2}du = \int \mathbf{cos}\, x \cdot e^{-x}dx - \int \mathbf{sin}\, x \cdot e^{-x}dx.$$

К интегралу с косинусом применим формулу интегрирования по частям:

$$\int \mathbf{cos}\, x \cdot e^{-x}dx = \left| \begin{matrix} U = e^{-x} \to dU = -e^{-x}dx \\ dV = \mathbf{cos}\, xdx \to V = \mathbf{sin}\, x \end{matrix} \right| = e^{-x}\,\mathbf{sin}\, x + \int \mathbf{sin}\, x \cdot e^{-x}dx.$$

Таким образом,

$$\frac{u^{-1}}{-1}=e^{-x}\sin x+\int\sin x\cdot e^{-x}dx-\int\sin x\cdot e^{-x}dx=e^{-x}\sin x+C\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{u}=-e^{-x}\sin x-C\Leftrightarrow u=-\frac{1}{e^{-x}\sin x+C}.$$

г) $y=uv=-\dfrac{e^{-x}}{e^{-x}\sin x+C}=-\dfrac{1}{\sin x+C\cdot e^{x}}$.

Пример 77. Решим дифференциальное уравнение: $3xdy=(y+6x^2)dx$.

Преобразуем исходноед.у. следующим образом:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(y+6x^2)}{3x}\Leftrightarrow\ y'-\frac{1}{3x}y=2x.$$

Получили линейное неоднородное д.у. 1-го порядка (см. (53)).

Так же, как и в предыдущих примерах, проведем решение в несколько этапов.

а) $y=uv,\ \ y'=u'v+uv'\Rightarrow u'v+uv'-\dfrac{1}{3x}uv=2x\Rightarrow u'v+u\left[v'-\dfrac{1}{3x}v\right]=2x$.

б) $v'-\dfrac{1}{3x}v=0\Rightarrow\dfrac{dv}{dx}=\dfrac{1}{3x}v\Rightarrow\dfrac{dv}{v}=\dfrac{dx}{3x}\Rightarrow\int\dfrac{dv}{v}=\int\dfrac{dx}{3x}\Rightarrow\ln|v|=\dfrac{1}{3}\ln|x|\Rightarrow v=\sqrt[3]{x}$.

в) $u'\sqrt[3]{x}=2x\Rightarrow u'=2x^{2/3}\Rightarrow u=2\int x^{2/3}dx\Rightarrow u=\dfrac{6x^{5/3}}{5}+C$.

г) $y=\left(\dfrac{6x^{5/3}}{5}+C\right)x^{1/3}=\dfrac{6}{5}x^2+Cx^{1/3}$.

Лекция 14
Дифференциальные уравнения 2-го порядка

Основные определения, связанные с дифференциальными уравнениями 2-го порядка

Определение 40.***Обыкновенным дифференциальным уравнением*** 2-го порядка называется уравнение вида:

$$F(x,y,y',y'')=0, \tag{54}$$

в котором x – независимая переменная, $y = y(x)$ – искомая функция, $y' = y'(x)$ и $y'' = y''(x)$ – ее первая и вторая производные, а F – заданная функция четырех переменных, определенная в некоторой области пространства R^4.

■

Определение 41. Если из уравнения (54) можно выразить y'', то это уравнение записывается в виде

$$y'' = f(x, y, y') \tag{54$'$}$$

(предполагается, что функция $f(x, y, y')$ определена в некоторой области пространства R^3) и называется дифференциальным уравнением 2-го порядка, разрешенным относительно старшей производной.

■

Определение 42. ***Решением*** д.у. (54) и д.у. (54′), называется функция $y = y(x)$, определенная и дважды дифференцируемая на некотором интервале (a, b), которая, будучи подставлена в данные уравнения, превращает их в тождества (т.е. на (a, b), соответственно, выполняются тождества $F\left(x, y(x), y'(x), y''(x)\right) \equiv 0$ или $y''(x) \equiv f\left(x, y(x), y'(x)\right)$. ***Общим решением*** д.у. (54) и (54′) называется функция

$$y = \varphi(x, C_1, C_2), \tag{55}$$

удовлетворяющая условиям:

а) она является решением д.у. при любых конкретных значениях параметров C_1 и C_2 (эти параметры называются произвольными постоянными);

б) для любой точки $\left(x_0, y_0, y_0'\right)$ из области определения функции $f(x, y, y')$ найдутся такие значения $C_1 = C_1^0$ и $C_2 = C_2^0$, что функция $y = \varphi(x, C_1, C_2)$ удовлетворяет соотношениям:

$$\begin{cases} y_0 = \varphi(x_0, C_1^{(0)}, C_2^{(0)}); \\ y_0' = \varphi'(x_0, C_1^{(0)}, C_2^{(0)}). \end{cases} \qquad (56)$$

Нахождение таких $C_1 = C_1^{(0)}$ и $C_2 = C_2^{(0)}$ из соотношений (56) называется решением задачи Коши с начальными условиями (x_0, y_0, y_0'). Найденную таким образом функцию $y = \varphi\,(x, C_1^0, C_2^0)$ называют частным решением д.у.

Если, решая д.у. 2-го порядка, мы получаем обычное уравнение вида $\Phi(x, y, C_1, C_2) = 0$, разрешив которое относительно y можно получить общее решение исходного д.у., то выражение $\Phi(x, y, C_1, C_2) = 0$ называют общим интегралом этого дифференциального уравнения.

■

Дифференциальные уравнения 2-го порядка,

допускающие понижение порядка

1.Пусть правая часть уравнения (54′) зависит только от x, т.е. уравнение имеет вид:

$$y'' = f(x). \qquad (57)$$

Тогда $y' = \int f(x)dx = \varphi_1(x) + C_1, \qquad y = \int \varphi_1(x)dx + C_1 x = \varphi_2(x) + C_1 x + C_2$.

2.Пусть левая часть уравнения (54) не зависит от y, т.е. уравнение имеет вид:

$$F(x, y', y'') = 0. \qquad (58)$$

Если сделать замену $y' = z(x)$, то $y'' = z'(x)$, и мы приходим к уравнению 1-го порядка $F(x, z, z') = 0$, которое иногда может быть решено одним из приемов, описанных выше. Найдя z, из соотношения $y' = z$ находим y.

3.Пусть левая часть уравнения (54) не зависит от x,т.е. уравнение имеет вид:

$$F(y, y', y'') = 0. \qquad (59)$$

Если сделать замену $y' = z(y)$, то по правилу дифференцирования сложной функции $y'' = z'(y) \cdot y'(x) = z' \cdot z$, и мы приходим к уравнению 1-го порядка $F(y, z, z' \cdot z) = 0$, в котором независимой переменной следует считать переменную y, а искомая функция z зависит от y. Это уравнение иногда может быть решено одним из приемов, описанных выше. Найдя z, из соотношения $y' = z(y)$ определяем y.

Пример 78. Решим д.у. $y'' = 3\sin x \cos^2 x$. Оно имеет вид (57), поэтому:

$$y' = \int 3\sin x \cos^2 x dx = \left| \begin{array}{c} t = \cos x \\ dt = -\sin x dx \Rightarrow \sin x dx = -dt \end{array} \right| = -3\int t^2 dt = -t^3 + C_1 = -\cos^3 x + C_1 .$$

Следовательно,

$$y = -\int \cos^3 x dx + C_1 x = -\int \cos^2 x \cos x dx + C_1 x = -\int \left(1 - \sin^2 x\right) \cos x dx + C_1 x =$$

$$= -\int \cos x dx + \int \sin^2 x \cos x dx + C_1 x = -\sin x + C_1 x + \int \sin^2 x \cos x dx = \left| \begin{array}{c} t = \sin x \\ dt = \cos x dx \end{array} \right| =$$

$$= -\sin x + C_1 x + \int t^2 dt = -\sin x + C_1 x + \frac{t^3}{3} + C_2 = \frac{1}{3}\sin^3 x - \sin x + C_1 x + C_2 .$$

Пример 79. Решим д.у. $xy'' = y' \ln\left(\frac{y'}{x}\right)$. Оно имеет вид (58). Поэтому применяем замену $y' = z(x)$, $y'' = z'(x)$ и сводим исходноед.у. к д.у. 1-го порядка:

$$xz' = z \ln\left(\frac{z}{x}\right) \Leftrightarrow z' = \frac{z}{x} \ln\left(\frac{z}{x}\right).$$

Это д.у. является однородным д.у. 1-го порядка. Решаем его, вводя вместо z новую функцию Z:

$$Z = \frac{z}{x} \Rightarrow z = Zx \Rightarrow z' = Z'x + Z .$$

В результате этой замены данное уравнение приводится к д.у. с разделяющимися переменными:

$$Z'x+Z=Z\ln Z \Leftrightarrow \frac{dZ}{dx}x=Z(\ln Z-1)\Leftrightarrow xdZ=Z(\ln Z-1)dx.$$

Разделяя переменные, получаем:

$$\frac{dZ}{Z(\ln Z-1)}=\frac{dx}{x}\Leftrightarrow \int\frac{dZ}{Z(\ln Z-1)}=\int\frac{dx}{x}.$$

Так как $\int\frac{dZ}{Z(\ln Z-1)}=\left|\begin{aligned} t&=\ln Z-1\\ dt&=\frac{dZ}{Z}\end{aligned}\right|=\int\frac{dt}{t}=\ln t=\ln(\ln Z-1)$, то

$$\ln(\ln Z-1)=\ln x+\ln C_1 \Leftrightarrow \ln(\ln Z-1)=\ln(C_1x)\Leftrightarrow \ln Z-1=C_1x\Leftrightarrow Z=e^{C_1x+1}.$$

Теперь возвращаемся к старым переменным:

$$z=xe^{C_1x+1}\Leftrightarrow \frac{dy}{dx}=xe^{C_1x+1}\Leftrightarrow dy=xe^{C_1x+1}dx \Leftrightarrow y=\int xe^{C_1x+1}dx=\left|\begin{matrix} u=x & \Rightarrow & du=dx\\ dv=e^{C_1x+1}dx & \Rightarrow & v=\frac{1}{C_1}e^{C_1x+1}\end{matrix}\right|=$$

$$=\frac{x}{C_1}e^{C_1x+1}-\frac{1}{C_1}\int e^{C_1x+1}dx=\frac{x}{C_1}e^{C_1x+1}-\frac{1}{C_1^2}e^{C_1x+1}+C_2.$$

Отметим, что, как всегда, знаки равносильности понимались у нас на областях, где данные равносильности можно было записать.

Пример 80. Решим д.у. $yy''-(y')^2=y^2\ln y$. Оно имеет вид (59). Поэтому применяем замену $y'=z(y)$, $y''=z'(y)\cdot y'(x)=z'\cdot z$ и сводим исходное д.у. к д.у. 1-го порядка $yzz'-z^2=y^2\ln y$. Делением на yz приводим это уравнение к д.у. Бернулли:

$$z'-\frac{1}{y}z=y\ln y\cdot z^{-1}.$$

Разобьем решение на этапы:

а) $z=uv\Rightarrow z'=u'v+uv'\Rightarrow$

$$u'v+uv'-\frac{1}{y}uv=y\ln y\cdot u^{-1}v^{-1}\Leftrightarrow u'v+u\left[v'-\frac{1}{y}v\right]=y\ln y\cdot u^{-1}v^{-1}$$

(заметим, что так как z зависит от y, то и функции u и v зависят от y);

б) $v'-\frac{1}{y}v=0\Leftrightarrow\frac{dv}{v}=\frac{dy}{y}\Leftrightarrow\int\frac{dv}{v}=\int\frac{dy}{y}\Leftrightarrow\ln v=\ln y\Leftrightarrow v=y$;

в) $u' y = y\ln y\cdot u^{-1}y^{-1} \Leftrightarrow y\cdot\frac{du}{dy} = \ln y\cdot u^{-1} \Leftrightarrow udu = \frac{\ln y}{y}dy \Leftrightarrow \int udu = \int\frac{\ln y}{y}dy$.

Так как $\int\frac{\ln y}{y}dy = \begin{vmatrix} t = \ln y \\ dt = \frac{dy}{y}\end{vmatrix} = \int tdt = \frac{t^2}{2} + C_1 = \frac{\ln^2 y}{2} + C_1$, то получаем:

$$\frac{u^2}{2} = \frac{\ln^2 y}{2} + C_1 \Leftrightarrow u = \sqrt{\ln^2 y + 2C_1};$$

г) $z = y\sqrt{\ln^2 y + 2C_1}$.

Вспоминая теперь, что $z = \frac{dy}{dx}$, имеем:

$$\frac{dy}{dx} = y\sqrt{\ln^2 y + 2C_1} \Leftrightarrow \frac{dy}{y\sqrt{\ln^2 y + 2C_1}} = dx \Leftrightarrow \int\frac{dy}{y\sqrt{\ln^2 y + 2C_1}} = x + C_2.$$

Так как $\int\frac{dy}{y\sqrt{\ln^2 y + 2C_1}} = \begin{vmatrix} t = \ln y \\ dt = \frac{dy}{y}\end{vmatrix} = \int\frac{dt}{\sqrt{t^2 + 2C_1}} = \ln\left(t + \sqrt{t^2 + 2C_1}\right) = \ln\left(\ln y + \sqrt{\ln^2 y + 2C_1}\right)$,

то общий интеграл исходногод.у. имеет вид: $\ln\left(\ln y + \sqrt{\ln^2 y + 2C_1}\right) = x + C_2$.

Пример 81. Решить дифференциальное уравнение: $y'' = x\sqrt{y'}$.

Это уравнение имеет вид (58). Поэтому используя замену $y' = z(x),\ \ y'' = z'(x)$, сведем исходноед.у. к уравнению 1-го порядка: $z' = x\sqrt{z}$.

Разделим переменные:

$$\frac{dz}{dx} = x\sqrt{z} \Leftrightarrow \frac{dz}{\sqrt{z}} = xdx \Leftrightarrow \int\frac{dz}{\sqrt{z}} = \int xdx \Leftrightarrow 2\sqrt{z} = \frac{x^2}{2} + C_1 \Leftrightarrow z = \left(\frac{x^2}{4} + \frac{C_1}{2}\right)^2.$$

Теперь, возвращаемся к старым переменным:

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{x^2}{4} + \frac{C_1}{2}\right)^2 \Leftrightarrow dy = \left(\frac{x^2}{4} + \frac{C_1}{2}\right)^2 dx \Leftrightarrow y = \int\left(\frac{x^4}{16} + \frac{C_1x^2}{4} + \frac{C_1^{\ 2}}{4}\right)dx \Leftrightarrow \Leftrightarrow$$

$$y = \frac{1}{4}\left(\frac{x^5}{20} + \frac{C_1x^3}{3} + C_1^{\ 2}x\right) + C_2.$$

Пример 82. Решить дифференциальное уравнение: $y'' + \frac{2x}{x^2+1}y' = 2x$.

Это уравнение, так же, как и предыдущее, сводится к д.у. 1-го порядка заменой $y' = z(x),\ y'' = z'(x)$ (см. (10)).Получаем д.у.: $z' + \frac{2x}{x^2+1} z = 2x$ Оно имеет вид (53). Разобьем решение на несколько этапов.

а) $z = uv,\ z' = u'v + uv' \Rightarrow u'v + uv' + \frac{2x}{x^2+1} uv = 2x \Rightarrow u'v + u\left[v' + \frac{2x}{x^2+1} v\right] = 2x$;

б) $v' + \frac{2x}{x^2+1} v = 0 \Rightarrow \frac{dv}{dx} = -\frac{2x}{x^2+1} v \Rightarrow \frac{dv}{v} = -\frac{2x}{x^2+1} dx \Rightarrow \int \frac{dv}{v} = -\int \frac{2x}{x^2+1} dx$.

Вычислим второй интеграл:

$$\int \frac{2x}{x^2+1} dx = \left| \begin{matrix} x^2+1=t \\ 2xdx = dt \end{matrix} \right| = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln\left|x^2+1\right| + C.$$

Таким образом, получаем: $\ln|v| = -\ln\left|x^2+1\right| \Rightarrow v = \frac{1}{x^2+1}$;

в) $u' \frac{1}{x^2+1} = 2x \Rightarrow u' = 2x^3 + 2x \Rightarrow u = \int \left(2x^3 + 2x\right) dx \Rightarrow .u = \frac{1}{2} x^4 + x^2 + C_1$;

г) $z = \left(\frac{1}{2} x^4 + x^2 + C_1\right) \frac{1}{x^2+1}$.

Теперь подставляем найденную функцию z в равенство $y' = z$:

$$y' = \left(\frac{1}{2} x^4 + x^2 + C_1\right) \frac{1}{x^2+1} \Leftrightarrow y = \frac{1}{2} \int \frac{x^4 + 2x^2 + 1 + 2C_1 - 1}{x^2+1} dx \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{1}{2} \int \frac{\left(x^2+1\right)^2 + 2C_1 - 1}{x^2+1} dx \Leftrightarrow y = \frac{1}{2} \int \left(x^2 + 1 + \frac{2C_1 - 1}{x^2+1}\right) dx \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{1}{2} \left(\frac{x^3}{3} + x + \left(2C_1 - 1\right) arctg\, x\right) + C_2.$$

Линейные однородные д.у. 2-го порядка с постоянными коэффициентами

Определение 43. ***Линейным однородным д.у. 2-го порядка с постоянными коэффициентами*** называется уравнение вида:

$$y'' + py' + qy = 0, \qquad (60)$$

где p и q – некоторые действительные числа. ***Характеристическим уравнением***д.у. (60) называется квадратное уравнение относительно параметра λ, получающееся из уравнения (60) формальной заменой y'' на λ^2, y' на λ и y на 1.

Таким образом, характеристическое уравнение дифференциального уравнения (60) имеет вид:

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0. \qquad (61)$$

Пусть λ_1, λ_2 – корни уравнения (61). Возможны три случая:

а) корни действительны и различны, т.е. $\lambda_1 \neq \lambda_2$;

б) корни действительные совпадающие, т.е. $\lambda_1 = \lambda_2$;

в) корни комплексные, сопряженные, т.е. $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$, где $i = \sqrt{-1}$ – мнимая единица.

■

Теорема 32. В каждом из случаев а), б) и в) вид общего решения д.у. (60), которое обозначается y_{00}, представлен так:

Случай	Общее решение y_{00} д.у. (60)
а)	$y_{00} = C_1 \cdot e^{\lambda_1 x} + C_2 \cdot e^{\lambda_2 x}$;
б)	$y_{00} = e^{\lambda_1 x}\left(C_1 + C_2 \cdot x\right)$;
в)	$y_{00} = e^{\alpha x}\left(C_1 \sin \beta x + C_2 \cos \beta x\right)$.

■

Пример 83. Решить следующие линейные однородные д.у. 2-го порядка с постоянными коэффициентами:

1) $y'' + y' - 6y = 0$;

2) $y'' - 10y' + 25y = 0$;

3) $y'' + 14y' + 53y = 0$.

Решение. 1. Характеристическое уравнение данногод.у. имеет вид $\lambda^2+\lambda-6=0$. Решаем это квадратное уравнение:

$\lambda_{1,2}=\dfrac{-1\pm\sqrt{1+24}}{2}=\dfrac{-1\pm 5}{2}\Rightarrow\lambda_1=-3,\lambda_2=2$. По теореме 32 (см. строку а)) получаем общее решение: $y_{00}=C_1e^{-3x}+C_2e^{2x}$.

2. Составляем характеристическое уравнение: $\lambda^2-10\lambda+25=0$. Решая его по формуле с половинным коэффициентом, получаем: $\lambda_{1,2}=5\pm\sqrt{25-25}=5\Rightarrow\lambda_1=\lambda_2=5$. По теореме 32(см. строку б)) получаем общее решение: $y_{00}=e^{5x}\left(C_1+C_2x\right)$.

3. Решая характеристическое уравнение $\lambda^2+14\lambda+53=0$ по формуле с половинным коэффициентом, имеем: $\lambda_{1,2}=-7\pm\sqrt{49-53}=-7\pm\sqrt{-4=}-7\pm 2i$, т.е. в теореме 32 нужно строку в): $y_{00}=e^{-7x}\left(C_1\sin 2x+C_2\cos 2x\right)$.

Пример 84. Найти частное решение д.у. $y''-3y'=0$, удовлетворяющее начальным условиям $y(1)=2,\ y'(1)=1$.

Найдем общее решение: $\lambda^2-3\lambda=0\Rightarrow\lambda_1=0,\ \lambda_2=3\Rightarrow y_{oo}=C_1+C_2e^{3x}$.

Для реализации начальных условий нам понадобится производная общего решения: $y'_{oo}=3C_2e^{3x}$. Подставляя в общее решение и его производную вместо x число 1, а вместо y соответствующие числа, получаем систему уравнений для нахождения C_1 и C_2:

$$\begin{cases}C_1+C_2e^3=2,\\ 3C_2e^3=1.\end{cases}$$

Решая полученную систему, находим $C_2=\dfrac{1}{3e^3}$, $C_1=\dfrac{5}{3}$.

Таким образом, искомое частное решение имеет вид: $y_{чо}=\dfrac{5}{3}+\dfrac{1}{3e^3}e^{3x}$.

Пример 85. Найти частное решение д.у. $y''+2y'+5y=0$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0)=1,\ y'(0)=3$.

$$\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = -1 \pm 2i \Rightarrow y_{oo} = e^{-x}\left(C_1 \sin 2x + C_2 \cos 2x\right).$$

Найдем $y'_{oo} = -e^{-x}\left(C_1 \sin 2x + C_2 \cos 2x\right) + e^{-x}\left(2C_1 \cos 2x - 2C_2 \sin 2x\right).$

Используя начальные условия, получаем:

$$\begin{cases} C_2 = 1, \\ -C_2 + 2C_1 = 1; \end{cases} \Rightarrow C_1 = 2.$$

Частное решение данного уравнения имеет вид: $y_{чо} = e^{-x}\left(2\sin 2x + \cos 2x\right).$

Линейные неоднородные д.у. 2-го порядка с постоянными коэффициентами

Определение 44. Линейным неоднородным д.у. 2-го порядка с постоянными коэффициентами называется уравнение вида:

$$y'' + py' + qy = f(x), \tag{62}$$

где p и q – некоторые действительные числа.

■

Справедлива следующаятеорема:

*Теорема 33.**Общее решение*д.у. (62) (которое обозначается $y_{он}$) равно сумме ***общего решения*** соответствующего однородного уравнения (60) и какого-либо ***частного решения*** (которое обозначается $y_{чн}$) д.у. (62):

$$y_{он} = y_{оо} + y_{чн}. \tag{63}$$

■

Из теоремы 33 вытекает, что для нахождения общего решения линейного неоднородного уравнения (62) достаточно научиться находить лишь одно частное решение этого д.у.Займемся важным случаем, когда правая часть уравнения (62) имеет вид:

$$f(x) = e^{ax}\left[P_m(x)\cos bx + Q_n(x)\sin bx\right], \tag{64}$$

где a и b – действительные числа, а $P_m(x)$ и $Q_n(x)$ – многочлены, соответственно, степеней*т*и*п.*Метод построения частного решения д.у. (62) с такой правой частью доставляет следующаятеорема:

Теорема 34. Составляем комплексное число $a+ib$, где действительные числа a и b взяты из выражения (64). Тогда в зависимости от того, является или не является число $a+ib$ корнем характеристического уравнения (61), вид $y_{чн}$ определяется табл. 3.

Таблица 3

Число $a+ib$	Вид $y_{чн}$
1. Не является корнем характеристического уравнения	$y_{чн} = e^{ax}\left[\widetilde{P}_k(x)\cos bx + \widetilde{Q}_k(x)\sin bx\right]$
2. Является корнем характеристического уравнения кратности 1	$y_{чн} = xe^{ax}\left[\widetilde{P}_k(x)\cos bx + \widetilde{Q}_k(x)\sin bx\right]$
3. Является корнем характеристического уравнения кратности 2	$y_{чн} = x^2 e^{ax}\left[\widetilde{P}_k(x)\cos bx + \widetilde{Q}_k(x)\sin bx\right]$

Здесь $\widetilde{P}_k(x), \widetilde{Q}_k(x)$ –многочлены степени k, где $k = \mathbf{max}(m, n)$. Коэффициенты этих многочленов находятся методом неопределенных коэффициентов.

Замечание:

1. Если в выражении (64) отсутствуют тригонометрические функции, то это означает, что $b=0$, нужно проверять, является ли число a корнем характеристического уравнения, и, очевидно, следует брать $k=m$. Если к тому же в (64) отсутствует показательная функция, то это означает, что $a=0$, и нужно проверять, является ли число 0 корнем характеристического уравнения.

2. Если $b \neq 0$ и число $a+ib$ ***является*** корнем характеристического уравнения, то известно, что сопряженное комплексное число $a-ib$ также является корнем этого уравнения, а так как рассматриваемое характеристическое уравнение – квадратное, то кратность корня $a+ib$ – единица. Поэтому вариант 3, описанный в табл. 3, в данном случае невозможен.

Пример 86. Решим уравнение $y'' - 4y = x - 1$.

а) Записываем характеристическое уравнение, решаем его и находим y_{oo}:

$$\lambda^2 - 4 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 2, \lambda_2 = -2 \Rightarrow y_{00} = C_1 \cdot e^{2x} + C_2 \cdot e^{-2x}.$$

б) Составляем $a + ib$. Так как здесь $a = 0$ и $b = 0$ (см. замечание после теоремы 3), то $a + ib = 0$. Число 0 не является корнем характеристического уравнения. Из теоремы 34вытекает (см. 1-ю строку табл. 3), что $y_{чн} = Ax + B$, где A и B – неизвестные коэффициенты. Найдем их. Подставим $y_{чн}$ в исходное уравнение. Эту подстановку удобно осуществлять следующим образом (для упрощения обозначений мы употребляем y вместо $y_{чн}$):

$$\begin{array}{r|l|c} -4 & y & Ax + B \\ 0 & y' & A \\ 1 & y'' & 0 \\ \hline & & -4Ax - 4B = x - 1 \end{array}$$

Приравниваем слева и справа коэффициенты при одинаковых степенях x (в этом и заключается метод неопределенных коэффициентов):

$$\begin{array}{r|l} x & -4A = 1 \Rightarrow A = -\dfrac{1}{4} \\ x^0 & -4e = -1 \Rightarrow e = \dfrac{1}{4} \end{array}$$

Итак, $y_{чн} = -\frac{1}{4}x + \frac{1}{4}$.

в) Руководствуясь формулой (63), получаем:

$$y_{он} = C_1 \cdot e^{2x} + C_2 \cdot e^{-2x} - \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}.$$

Пример 87. Решим д.у. $y'' - 4y' + 3y = e^{5x}$.

а) Записываем характеристическое уравнение, решаем его и находим y_{oo}:

$$\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 3 \Rightarrow y_{00} = C_1 e^x + C_2 e^{3x}.$$

б) Составляем $a+ib$. Так как здесь $a=5$ и $b=0$ (см. замечание после теоремы 34), то $a+ib=5$. Число 5 не является корнем характеристического уравнения. Так как многочлен, стоящий перед показательной функцией, равен 1 (т.е. имеет нулевую степень), то и многочлен, входящий в состав $y_{чн}$, должен иметь нулевую степень, т.е. должен быть какой-то константой. Следовательно, $y_{чн}=Ae^{5x}$. Находим A:

$$
\begin{array}{r|l|c}
3 & y & Ae^{5x} \\
-4 & y' & 5Ae^{5x} \\
1 & y'' & 25Ae^{5x} \\
\hline
 & & 3Ae^{5x}-20Ae^{5x}+25Ae^{5x}=e^{5x}
\end{array}
$$

Получаем: $8Ae^{5x}=e^{5x}\Rightarrow A=\dfrac{1}{8}$. Т.е., $y_{чн}=\dfrac{e^{5x}}{8}$.

в) По теореме 34

$$y_{он}=C_1e^{x}+C_2e^{3x}+\frac{e^{5x}}{8}.$$

Пример 88. Решим д.у. $y''-9y'+20y=x^2e^{4x}$.

а) Находим y_{00}:

$$\lambda^2-9\lambda+20=0\Rightarrow\lambda_1=4,\lambda_2=5\Rightarrow y_{00}=C_1e^{4x}+C_2e^{5x};$$

б) Так как $a=4,b=0$ и 4 является однократным корнем характеристического уравнения, то по теореме 34 (см. 2-ю строку табл. 3) частное решение исходного неоднородного уравнения имеет вид:

$$y_{чн}=x\left(Ax^2+Bx+C\right)e^{4x}=\left(Ax^3+Bx^2+Cx\right)e^{4x}.$$

Найдем коэффициенты A, B и C.

$$
\begin{array}{r|l|c}
20 & y & \left(Ax^3+Bx^2+Cx\right)e^{4x} \\
-9 & y' & \left(3Ax^2+2Bx+C\right)e^{4x}+4\left(Ax^3+Bx^2+Cx\right)e^{4x}=\left(4Ax^3+3Ax^2+4Bx^2+2Bx+4Cx+C\right)e^{4x} \\
1 & y'' & \left(12Ax^2+6Ax+8Bx+2B+4C\right)e^{4x}+\left(16Ax^3+12Ax^2+16Bx^2+8Bx+16Cx+4C\right)e^{4x} \\
\hline
 & & 20Ax^3+20Bx^2+20Cx-36Ax^3-27Ax^2-36Bx^2-18Bx-36Cx-9C+16Ax^3+24Ax^2+ \\
 & & +16Bx^2+6Ax+16Bx+16Cx+2B+8C=x^2
\end{array}
$$

Приравниваем слева и справа коэффициенты при одинаковых степенях x:

$$\begin{array}{r|c} x^2 & -3A=1\Rightarrow A=-\dfrac{1}{3} \\ x & 6A-2B=0\Rightarrow -2-2B=0\Rightarrow B=-1 \\ x^0 & 2B-C=0\Rightarrow -2-C=0\Rightarrow C=-2 \end{array}$$

Итак: $y_{чн}=-\left(\dfrac{1}{3}x^3+x^2+2x\right)e^{4x}$;

в) $y_{он}=C_1e^{4x}+C_2e^{5x}-\left(\dfrac{1}{3}x^3+x^2+2x\right)e^{4x}$.

*Пример 89.*Решим д.у. $y''+y=3\sin x$.

а) $\lambda^2+1=0\Rightarrow\lambda^2=-1\ \lambda_{1,2}=\pm i\Rightarrow y_{00}=C_1\cdot\sin x+C_2\cdot\cos x$.

б) Так как $a=0,\ b=1$, то $a+ib=i$ есть (однократный) корень характеристического уравнения. Поэтому $y_{чн}=x(A\cdot\sin x+B\cdot\cos x)$. Найдем A и B:

$$\begin{array}{r|l|c} 1 & y & x(A\sin x+B\cos x) \\ 0 & y' & A\sin x+B\cos x+x(A\cos x-B\sin x) \\ 1 & y'' & A\cos x-B\sin x+A\cos x-B\sin x+x(-A\sin x-B\cos x) \\ \hline & & x(A\sin x+B\cos x)+A\cos x-B\sin x+A\cos x-B\sin x+x(-A\sin x-B\cos x)=3\sin x \end{array}$$

Итак, $-2B\sin x+2A\cos x=3\sin x$. Приравняем коэффициенты при $\sin x$ и при $\cos x$ (возможность такого действия связана с линейной независимостью функций $\sin x$ и $\cos x$, которая будет доказана позднее):

$$\begin{array}{r|c} \sin x & -2B=3\Rightarrow B=-3/2 \\ \cos x & 2A=0\Rightarrow A=0 \end{array}$$

Поэтому $y_{чн}=-\dfrac{3}{2}x\cos x$;

в) $y_{он}=C_1\cdot\sin x+C_2\cdot\cos x-\dfrac{3}{2}x\cos x$.

Пример 90. Решим д.у. $y''-8y'+16y=e^{4x}$;

а) $\lambda^2-8\lambda+16=0\Rightarrow\lambda_{1,2}=4\Rightarrow y_{00}=e^{4x}(C_1+C_2x)$.

б) Так как $a+ib=4$ есть двукратный корень характеристического уравнения, то по теореме 34 (см. 3-ю строку табл. 3) частное решение исходного неоднородного уравнения имеет вид: $y_{чн} = Ax^2e^{4x}$. Найдем A:

$$\begin{array}{r|l|c}
16 & y & Ax^2e^{4x} \\
-8 & y' & 2Axe^{4x}+4Ax^2e^{4x} \\
1 & y'' & 2Ae^{4x}+8Axe^{4x}+8Axe^{4x}+16Ax^2e^{4x} \\
\hline
 & & 16Ax^2e^{4x}-16Axe^{4x}-32Ax^2e^{4x}+2Ae^{4x}+8Axe^{4x}+8Axe^{4x}+16Ax^2e^{4x}=e^{4x}
\end{array}$$

Получаем: $2Ae^{4x}=e^{4x} \Rightarrow A=\frac{1}{2}$. Таким образом, $y_{чн}=\frac{x^2e^{4x}}{2}$;

в) $y_{он}=e^{4x}(C_1+C_2x)+\frac{x^2e^{4x}}{2}$.

Теорема 35. Частное решение уравнения $y''+py'+qy=f_1(x)+f_2(x)$ можно получить в соответствии с формулой:

$$y_{чн}=y_{чн1}+y_{чн2}, \qquad (65)$$

где $y_{чн1}$ и $y_{чн2}$ – частные решения, соответственно, уравнений $y''+py'+qy=f_1(x)$ и $y''+py'+qy=f_2(x)$.

■

Пример 91. Решим д.у. $y''+y=xe^x+2e^{-x}$.

а) $\lambda^2+1=0 \Rightarrow \lambda^2=-1\ \lambda_{1,2}=\pm i \Rightarrow y_{00}=C_1\cdot\mathbf{sin}\,x+C_2\cdot\mathbf{cos}\,x$;

б) Обозначим $f_1(x)=xe^x, f_2(x)=2e^{-x}$. Правой части $f_1(x)=xe^x$ соответствует $a_1+ib_1=1$, которое не является корнем характеристического уравнения, поэтому

$$y_{чн1}=(Ax+B)e^x.$$

Правой части $f_2(x)=2e^{-x}$ соответствует $a_2+ib_2=-1$, которое также не является корнем характеристического уравнения, поэтому

$$y_{чн2}=Ce^{-x}.$$

По теореме 6 имеем: $y_{чн}=y_{чн1}+y_{чн2}=(Ax+B)e^x+Ce^{-x}$. Найдем A, B и С:

$$
\begin{array}{r|l|c}
1 & y & (Ax+B)e^{x}+Ce^{-x} \\
0 & y' & Ae^{x}+(Ax+B)e^{x}-Ce^{-x} \\
1 & y'' & Ae^{x}+Ae^{x}+(Ax+B)e^{x}+Ce^{-x} \\
\hline
 & & (Ax+B)e^{x}+Ce^{-x}+Ae^{x}+Ae^{x}+(Ax+B)e^{x}+Ce^{-x}=xe^{x}+2e^{-x}
\end{array}
$$

Итак, $2Axe^{x}+(2A+2B)e^{x}+2Ce^{-x}=xe^{x}+2e^{-x}$. Приравнивая коэффициенты при функциях xe^{x},e^{x} и e^{-x} (которые, как будет показано, являются линейно независимыми), получаем:

$$
\begin{array}{r|c}
xe^{x} & 2A=1 \Rightarrow A=1/2 \\
e^{x} & 2A+2B=0 \Rightarrow B=-1/2 \\
e^{-x} & 2C=2 \Rightarrow C=1
\end{array}
$$

Следовательно, $у_{чн}=(0{,}5x-0{,}5)e^{x}+e^{-x}$;

в) $у_{он}=C_1\cdot\mathbf{sin}\,x+C_2\cdot\mathbf{cos}\,x+(0{,}5x-0{,}5)e^{x}+e^{-x}$.

РАЗДЕЛ 5. ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Лекция 15

Основные понятия теории вероятностей

Введение

Теория вероятностей – математическая наука, изучающая закономерности, присущие массовым случайным явлениям. Основным понятием теории вероятностей является понятие *случайного события*, т.е. события, которое (при некоторых обстоятельствах) может совершиться, а может и не совершиться. События обозначаются, как правило, большими латинскими буквами: $A, B,$ С… Совокупность условий, при которых данное случайное событие может произойти, называют *опытом(экспериментом, наблюдением, испытанием).*

*Пример 92.*Опыт – однократное бросание монеты, событие A– выпадение «орла»; опыт – стрельба по мишени, событие B– попадание в цель.

Элементарными событиями (эти события обычно обозначаются буквой ω) называют взаимоисключающие исходы испытания. Множество всех элементарных событий (которое может быть как конечным, так и бесконечным) называется *пространством элементарных событий*. Его обозначают буквой Ω.. Элементарные события часто называют исходами испытания.

Сначала для простоты будем считать, что множество Ω конечно. При этом с*лучайным событием* будем называть любое подмножество пространства Ω: $A \subseteq \Omega$. Элементарные события, входящие в подмножество A пространства Ω, называются *благоприятствующими событию* A. *Достоверным* называется событие, которое обязательно произойдёт в результате эксперимента. Ясно, что оно совпадает с Ω, так как ему благоприятствует любое элементарное событие. *Невозможным* называется случайное событие, которое в результате опыта произойти не может. Его обозначают символом пустого множества $\varnothing$ (это означает, что невозможному событию не благоприятствует ни одно элементарное).

Два события называются *несовместными*, если появление одного из них исключает появление другого в рамках единого эксперимента (т.е. они не могут произойти одновременно в одном опыте). В противном случае события называют *совместными.*

Пример 93. Рассмотрим эксперимент, состоящий в однократном бросании на идеальную горизонтальную поверхность игральной кости (шестигранного кубика), на гранях которой нанесены цифры от 1 до 6. Мы считаем, что игральная кость также имеет идеальную конфигурацию. Ясно, что в результате бросания мы можем получить шесть элементарных событий $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$, где ω_k – событие, заключающееся в выпадении числа $k\,(k = 1,2,\ldots,6)$. Ввиду симметрии игральной кости данные элементарные события можно считать равновозможными. В условиях описанного эксперимента можно рассмотреть различные случайные события. Например, если A– выпадение числа 1, то $A = \{\omega_1\}$, т. е. этому событию благоприятствует один исход. Если B – выпадение нечётного числа, то $B=\{\omega_1, \omega_3, \omega_5\}$, т.е. этому событию благоприятствуют 3 исхода. Событие C – выпало число 7 –не соответствует ни одному элементарному исходу, т.е. это невозможное событие. Событие D – выпало целое число от 1 до 6 – достоверное событие, так как ему благоприятствуют все элементарные исходы, т.е. $D=\Omega$.

Классическое определение вероятности

Определение 45. Пусть множество Ω конечно, т.е. $\Omega=\{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n\}$. Обозначим через $\mathcal{F}$ множество всех подмножеств множества Ω. На $\mathcal{F}$ определим функцию A следующим образом: если подмножеству $A \in \mathcal{F}$ благоприятствует ровно m элементарных событий, то полагаем:

$$P(A) := \frac{m}{n}. \tag{66}$$

Эту функцию P называют классической вероятностью.

■

Условимся число элементарных событий, из которых состоит событие A ,обозначать через $|A|$. При этом формулу (66) можно записать так:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}.$$

Пример 94 (продолжение примера 93). Пусть A_2 (соотв. A_3) – событие, состоящее в том, что выпавшее в результате бросания кости число делится на 2 (соотв., на 3). Вычислим вероятности событий A_2 и A_3. Так как $A_2=\{\omega_2, \omega_4, \omega_6\}$, а $A_3=\{\omega_3, \omega_6\}$, то применяя классическое определение вероятности, имеем:

$$P(A_2) = \frac{|A_2|}{n} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}, \qquad P(A_3) = \frac{|A_3|}{n} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

Пример 95. Из колоды, содержащей 36 карт, наудачу выбираем одну. Найти вероятность того, что она бубновой масти.

Число элементарных событий совпадает с количеством карт в колоде, т.е. $n=36$. Пусть A – событие, состоящее в том, что выбрана карта бубновой масти. Так как всего в колоде 9 бубновых карт, то $|A| = 9$. Поэтому $P(A) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$.

Пример 96. Одновременно бросают две монеты. Какова вероятность того, что на обеих выпадет решка?

Предположив, что результаты бросаний равновероятны, применим классическую схему. Тогда пространство элементарных событий Ω можно рассматривать как совокупность пар (орел, решка), (орел, орел), (решка, решка), (решка, орел), $n = |\Omega| = 4$. Ясно, что вероятность элементарного события (решка, решка) равна $\frac{1}{4}$.

Пример 97. Партия из 100 изделий содержит 10 бракованных изделий. Какова вероятность того, что среди выбранных наудачу пяти изделий ровно два окажутся бракованными?

Предполагая, что каждая выборка пяти изделий из 100 равновероятна любой другой такой же выборке, применим классическую схему. Как известно, число качественно различных выборок (или, что то же самое, число сочетаний) из r элементов по k вычисляется по формуле:

$$C_r^k = \frac{r!}{k! \cdot (r-k)!}. \tag{67}$$

Поэтому в нашем случае $n = |\Omega| = C_{100}^5$. Пусть A– событие, состоящее из выборок, содержащих два бракованных изделия и три качественных. Так как два бракованных изделия можно изъять только из 10бракованных, три качественных изделия – из 90 качественных и каждая бракованная пара может при выборе состыковаться с каждой качественной тройкой, то число элементарных событий (пятерок изделий), благоприятствующих событию A**,** $|A| = C_{10}^2 \cdot C_{90}^3$. Таким образом,

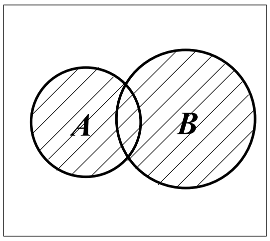
$$P(A)=\frac{|A|}{n}=\frac{C_{10}^{2}\cdot C_{90}^{3}}{C_{100}^{5}}=\frac{5!\cdot 95!\cdot 10!\cdot 90!}{100!\cdot 2!\cdot 8!\cdot 3!\cdot 87!}=\frac{3!\cdot 4\cdot 5\cdot 95!\cdot 8!\cdot 9\cdot 10\cdot 87!\cdot 88\cdot 89\cdot 90}{95!\cdot 96\cdot 97\cdot 98\cdot 99\cdot 100\cdot 2!\cdot 8!\cdot 3!\cdot 87!}=$$
$$=\frac{4\cdot 5\cdot 9\cdot 10\cdot 88\cdot 89\cdot 90}{96\cdot 97\cdot 98\cdot 99\cdot 100\cdot 2}=\frac{1335}{19012}\approx 0{,}07.$$

Замечание. Из определения (66) получаем: $P(A)=\frac{|A|}{n}$, $P(\Omega)=\frac{|\Omega|}{n}=\frac{n}{n}=1$, $P(\varnothing)=\frac{|\varnothing|}{n}=\frac{0}{n}=0$, $P(\omega_k)=\frac{|\omega_k|}{n}=\frac{1}{n}$, где $k=1,2...n$.

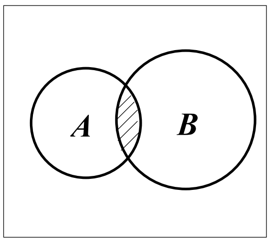
Действия над событиями. Алгебра событий

Над событиями можно проводить все операции, выполнимые для множеств.

Пусть Ω – произвольное множество (произвольное пространство элементарных событий), а $\mathcal{F}$ – какая-то совокупность подмножеств (событий) на Ω. Для определенности Ω мы будем изображать квадратом, а события из $\mathcal{F}$ – кругами в этом квадрате. Пусть A и B – события из $\mathcal{F}$.

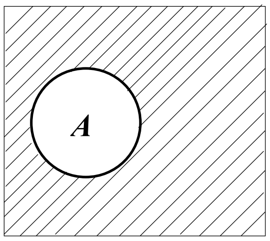


Суммой событий A и B называется событие $A+B$, состоящее из элементарных событий, благоприятствующих по крайней мере одному из событий A или B. Это означает, что событие $A+B$ совершается тогда и только тогда, когда совершается хотя бы одно из событий A или B. Геометрически сумме событий соответствует операция объединения множеств.



Произведением событий A и B называется событие $A\cdot B$, состоящее из элементарных событий, благоприятствующих одновременно и событию A, и событию B. Это означает, что событие $A\cdot B$

совершается тогда и только тогда, когда совершаются оба события A и B. Геометрически произведению событий соответствует операция пересечения множеств.



Противоположным событию A называется событие $\overline{A}$, состоящее из элементарных событий, не благоприятствующих событию A. Это означает, что событие $\overline{A}$ совершается тогда и только тогда, когда не совершается событие A. Геометрически противоположному событию соответствует операция дополнения множества.

Операции над событиями подчиняются точно тем же законам, что и операции над множествами. Например, справедливы соотношения (законы Де Моргана):

$$\overline{A+B} = \overline{A} \cdot \overline{B}, \qquad \overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}.$$

Определение 46. Совокупность $\mathcal{F}$ подмножеств множества Ω называется ***алгеброй событий***, если $\Omega \in \mathcal{F}$ и если $A+B \in \mathcal{F}$, $A \cdot B \in \mathcal{F}$, $\overline{A} \in \mathcal{F}$ для любых $A \in \mathcal{F}$ и $B \in \mathcal{F}$.

■

Так как $\overline{\Omega} = \varnothing$, то из определения 46 немедленно следует, что $\varnothing \in \mathcal{F}$ для любой алгебры событий $\mathcal{F}$.

Лекция16

Общее определение вероятностного пространства

От классического вероятностного пространства к общему вероятностному пространству

Пусть теперь мы находимся в рамках некоторого испытания. Придавая каждому событию A, связанному с данным испытанием, некоторую вероятность $P(A)$, мы тем самым создаем математическую модель, описывающую данное испытание. Построив математическую модель, мы имеем возможность для решения поставленных задач пустить в ход весьма развитый математический аппарат теории вероятностей, в основе которого лежит аксиоматика, впервые предложенная академиком А.Н.Колмогоровым в 1929 г.

Определение 47. ***Классическим вероятностным пространством*** называется тройка $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, где $\Omega = \{\omega_1, \omega_3, \ldots, \omega_n\}$, – некоторое множество, состоящее из конечного числа элементов; $\mathcal{F}$ – алгебра всех подмножеств множества Ω (включая само Ω и пустое множество $\varnothing$); P – функция, определенная на $\mathcal{F}$ формулой (66).

■

Из определения 46 вытекает, что если алгебра событий $\mathcal{F}$ содержит конечную совокупность событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$, то она содержит и события $\bigcup_{k=1}^{n} A_k := A_1 + A_2 + \ldots + A_n$ и $\bigcap_{k=1}^{n} A_k := A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n$. Однако, вообще говоря, неверно следующее утверждение: если алгебра событий $\mathcal{F}$ содержит бесконечную последовательность событий $A_1, A_2, \ldots, A_n, A_{n+1}, \ldots$, то она содержит события $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k := A_1 + A_2 + \ldots + A_n + A_{n+1} + \ldots$ (которое выполняется, если выполняется хотя бы одно из событий $A_1, A_2, \ldots, A_n, A_{n+1}, \ldots$) и $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k := A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n \cdot A_{n+1} \cdot \ldots$ (которое выполняется, если выполняется каждое из событий $A_1, A_2, \ldots, A_n, A_{n+1}, \ldots$).

Определение 48. Алгебра $\mathcal{F}$ называется ***σ-алгеброй***, если из того, что $A_k \in \mathcal{F}$ при всех $k = 1, 2, 3, \ldots$, следует, что $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{F}$.

■

Из легко доказываемого соотношения $\overline{\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \overline{A_k}$ следует, что если $\mathcal{F}$ – σ-алгебра и $A_k \in \mathcal{F}$ при всех k=1,2,3,..., то $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{F}$.

Определение 49. ***Вероятностным пространством*** называется тройка $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, где Ω – произвольное множество, $\mathcal{F}$ – σ-алгебра подмножеств множества Ω, P – функция, определенная на $\mathcal{F}$ и удовлетворяющая следующим условиям:

1. (Аксиома положительности). Для любого $A \in \mathcal{F}$ $P(A) \geq 0$ (вероятность любого события неотрицательна).

2. (Аксиома нормировки). $P(\Omega) = 1$ (вероятность достоверного события равна единице).

3. (Аксиома σ-аддитивности). Если содержащаяся в $\mathcal{F}$ последовательность событий $A_1, A_2, ..., A_n, A_{n+1}, ...$ такова, что $A_i \cdot A_j = \varnothing$ при всех $i \neq j$, то $P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k) := \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} P(A_k)$.

■

Заметим, что термины, связанные с общим определением вероятностного пространства, совпадают с терминами, данными в определении 47. Далее в этом пункте мы будем работать в некотором фиксированном вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Определение 50. События A и B называются ***несовместными***, если вероятность их произведения равна нулю ($P(A \cdot B) = 0$).

■

Свойства вероятности

1. $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

2. $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B)$.

Следствие. Для любых событий A и B $P(A+B)\le P(A)+P(B)$. Если события A и B несовместны, то справедлива формула: $P(A+B)=P(A)+P(B)$.

3. Если из события A следует событие B (т.е. если $A\subset B$), то $P(A)\le P(B)$.

Пример 98. В книжном шкафу в случайном порядке расставлены 15 книг, причем 5 из них в твердом переплете. Студент берет наудачу 3 книги. Найти вероятность того, что хотя бы одна из взятых книг имеет твердый переплет.

Нерациональный, но поучительный способ решения. Пусть A – искомое событие (состоящее в том, что хотя бы одна из взятых книг имеет твердый переплет). Введем следующие события: A_1 – из взятых книг ровно одна имеет твердый переплет, A_2 – ровно две имеют твердый переплет, A_3 – ровно три. Ясно, что $A=A_1+A_2+A_3$, причем события A_1, A_2 и A_3 удовлетворяют условию, входящему в аксиому σ-аддитивности. Применяя эту аксиому, получаем:

$$P(A)=P(A_1+A_2+A_3)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3).$$

Вероятности событий A_1, A_2 и A_3 находятся с помощью тех же рассуждений, которые были проведены при нахождении вероятности события A в примере 96. Таким образом, получаем:

$$P(A_1)=\frac{C_5^1\cdot C_{10}^2}{C_{15}^3}=\frac{45}{91},\qquad P(A_2)=\frac{C_5^2\cdot C_{10}^1}{C_{15}^3}=\frac{20}{91},\qquad P(A_3)=\frac{C_5^3}{C_{15}^3}=\frac{2}{91}.$$

Окончательно, $P(A)=\dfrac{45}{91}+\dfrac{20}{91}+\dfrac{2}{91}=\dfrac{67}{91}$.

Рациональное решение (переход к противоположному событию). Событие A (состоящее в том, что хотя бы одна из взятых книг имеет твердый переплет) и событие $\overline{A}$ (состоящее в том, что ни одна из взятых книг не имеет твердого переплета) – противоположные события. По свойству 1 вероятности $P(A) = 1 - P(\overline{A})$. Вероятность события $\overline{A}$ вычисляется аналогично вероятности события A_3: $P(\overline{A}) = \frac{C_{10}^3}{C_{15}^3} = \frac{24}{91}$. Поэтому $P(A) = 1 - \frac{24}{91} = \frac{67}{91}$.

Лекция17

Независимые события. Условные вероятности, формула полной вероятности и формула Байеса

Независимые события

При решении задач свойство 2 вероятности применяется чаще всего, если события Aи Bнезависимы. На интуитивном языке, событие Aне зависит от события B, если реализация события Aне зависит от того, совершилось событие Bили нет. Математическая реализация интуитивного понятия независимости содержится в следующем определении.

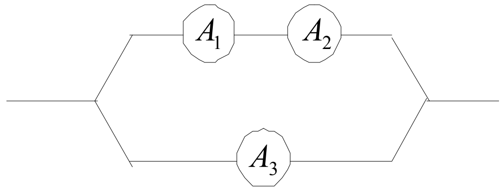
Определение 51. События Aи B на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ называются независимыми, если

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B). \qquad (68)$$

События $A_1, A_2, ..., A_n, A_{n+1}, ...$ того же вероятностного пространства называются независимыми в совокупности (соответственно, попарно независимыми), если для любого конечного набора натуральных чисел $i_1 < i_2 < ... < i_k$ (соотв., для двух любых натуральных чисел $i_1 < i_2$) выполняется равенство $P\left(A_{i_1} \cdot A_{i_2} \cdot ... \cdot A_{i_k}\right) = P\left(A_{i_1}\right) \cdot P\left(A_{i_2}\right) \cdot ... \cdot P\left(A_{i_k}\right)$ (соотв., равенство $P\left(A_{i_1} \cdot A_{i_2}\right) = P\left(A_{i_1}\right) \cdot P\left(A_{i_2}\right)$).

■

Пример 99. Рассмотрим часть электрической цепи:



Вероятность безотказной работы элемента A_1 равна 0,7, элемента A_2 – 0,8, элемента A_3 – 0,9. Найти вероятность того, что ток по цепи пройдет.

Обозначим через A_1, A_2 и A_3 события, состоящие в бесперебойной работе соответствующих элементов. Тогда $P(A_1)=0{,}7$, $P(A_2)=0{,}8$, $P(A_3)=0{,}9$. Пусть A – событие, состоящее в прохождении тока по цепи. Тогда

$$A = A_1 \cdot A_2 + A_3$$

По свойству 2 вероятности имеем:

$$P(A) = P(A_1 \cdot A_2 + A_3) = P(A_1 \cdot A_2) + P(A_3) - P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3).$$

Так как элементы цепи работают независимо, то события A_1, A_2 и A_3 можно считать независимыми в совокупности в смысле определения 51. Поэтому $P(A_1 \cdot A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2)$ и $P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3)$. Окончательно имеем:

$$P(A) = P(A_1) \cdot P(A_2) + P(A_3) - P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) = 0{,}56 + 0{,}9 - 0{,}504 = 0{,}956.$$

Условные вероятности, формула полной вероятности и формула Байеса

Определение 52. Пусть A – фиксированное событие из σ-алгебры $\mathcal{F}$, такое, что $P(A) > 0$. Для любого $B \in \mathcal{F}$ определим новую функцию:

$$P(B|A) = \frac{P(A \cdot B)}{P(A)}. \tag{69}$$

Эта функция называется *условной вероятностью* события B при условии, что событие A осуществилось (или просто *при условии* A).

■

Иногда целесообразно пользоваться следующим обозначением: $P_A(B) = P(B|A)$.

Пример 100. Урна содержит 3 красных и 2 черных шара (шары по форме неразличимы). Эксперимент состоит в том, что из урны наудачу последовательно вынимают 2 шара. Пусть A – событие, состоящее в том, что первым изъят красный шар, а B – событие, состоящее в том, что вторым вынут красный шар. Найти условные вероятности $P(B|A)$ и $P(B|\overline{A})$.

Вычислим $P(B|A)$. Так как событие A совершилось, то первым мы вынули красный шар. Следовательно, в урне остались 2 красных и 2 черных шара. После этого вероятность достать второй шар вычисляется по классической схеме: $P(B|A)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$. Аналогично рассуждая, получаем $P(B|\overline{A})=\frac{3}{4}$.

Определение 53. Совокупность событий $\{H_1,H_2,...,H_n\}$ положительной вероятности на $(\Omega,\mathcal{F},P)$ называется ***полной группой гипотез,*** если:

1) события $\{H_1,H_2,...,H_n\}$ попарно несовместны;

2) $H_1+H_2+...+H_n=\Omega$.

■

Теорема 36 (формула полной вероятности). Если $\{H_1,H_2,...,H_n\}$ – полная группа гипотез на $(\Omega,\mathcal{F},P)$, то вероятность любого события $A\in\mathcal{F}$ можно вычислить по формуле:

$$P(A)=P(A|H_1)\cdot P(H_1)+P(A|H_2)\cdot P(H_2)+\ldots+P(A|H_n)\cdot P(H_n). \qquad (70)$$

■

Пример 101. Пусть мы находимся в рамках условий примера 100. Требуется найти $P(B)$.

Заметим прежде всего, что в отличие от примера 100 нам ничего не известно о том, совершилось ли событие A или нет. Поэтому естественно ввести гипотезы $H_1=A$ и $H_2=\overline{A}$. Очевидно, что $\{H_1,H_2\}$ – полная группа гипотез. По формуле (70) полной вероятности имеем:

$$P(B)=P(B|H_1)\cdot P(H_1)+P(B|H_2)\cdot P(H_2).$$

Присутствующие здесь условные вероятности мы уже вычислили в примере 100, а именно: $P(B|H_1)=P(B|A)=1/2$, $P(B|H_2)=P(B|\overline{A})=3/4$. Используя классическое определение вероятности, имеем: $P(H_1) = P(A) = 3/5$, $P(H_2) = P(\overline{A}) = 2/5$. Следовательно,

$$P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} + \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{5} = 0{,}6.$$

Пример 102. По цели произведено три выстрела. Вероятность попасть в цель при первом выстреле (событие A_1) – $p_1 = 0{,}3$, при втором выстреле (событие A_2) – $p_2 = 0{,}6$, при третьем выстреле (событие A_3) – $p_3 = 0{,}8$. Вероятность разрушения цели при одном попадании равна $0{,}4$, при двух попаданиях – 0,7, при трех попаданиях – 1. Определить вероятность разрушения цели после произведения трех выстрелов (событие A).

Введем систему гипотез: H_1 – произошло одно попадание в цель, H_2 – два попадания, H_3 – три попадания, H_4 – нет попаданий. Ясно, что $\{H_1, H_2, H_3, H_4\}$ есть полная группа гипотез. Вычислим вероятности этих гипотез.

В цель осуществлено ровно одно попадание, если при первом выстреле было попадание, а при втором и третьем – промах; или при втором выстреле было попадание, а при первом и третьем – промах; или при третьем выстреле было попадание, а при первом и втором – промах. Поэтому $H_1 = A_1 \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{A_3} + \overline{A_1} \cdot A_2 \cdot \overline{A_3} + \overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot A_3$, причем ясно, что слагаемые в данной сумме попарно несовместны. Следовательно,

$$P(H_1) = P\left(A_1 \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{A_3}\right) + P\left(\overline{A_1} \cdot A_2 \cdot \overline{A_3}\right) + P\left(\overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot A_3\right).$$

Так как первый, второй и третий выстрелы никак не связаны друг с другом, то можно считать, что события A_1, A_2 и A_3 независимы в совокупности. Т.е.

$$P(H_1) = P(A_1) \cdot P\left(\overline{A_2}\right) \cdot P\left(\overline{A_3}\right) + P\left(\overline{A_1}\right) \cdot P(A_2) \cdot P\left(\overline{A_3}\right) + P\left(\overline{A_1}\right) \cdot P\left(\overline{A_2}\right) \cdot P(A_3).$$

Следовательно,

$$P(H_1) = p_1(1 - p_2)(1 - p_3) + (1 - p_1)p_2(1 - p_3) + (1 - p_1)(1 - p_2)p_3 = 0{,}332.$$

Рассуждая аналогично, получаем:

$$P(H_2)=p_1p_2(1-p_3)+p_1(1-p_2)p_3+(1-p_1)p_2p_3=0{,}468,$$
$$P(H_3)=p_1p_2p_3=0{,}144,$$
$$P(H_4)=(1-p_1)(1-p_2)(1-p_2)=0{,}056.$$

Запишем теперь условные вероятности разрушения цели при выполнении соответствующих гипотез. Эти вероятности заданы в условии:

$$P(A|H_1)=0{,}4,\ P(A|H_2)=0{,}7,\ P(A|H_3)=1,\ P(A|H_4)=0.$$

Применяя формулу (70) полной вероятности, получаем:

$$P(A)=P(A|H_1)\cdot P(H_1)+P(A|H_2)\cdot P(H_2)+P(A|H_3)\cdot P(H_3)+P(A|H_4)\cdot P(H_4)=$$
$$=0{,}4\cdot 0{,}332+0{,}7\cdot 0{,}468+1\cdot 0{,}144+0\cdot 0{,}056=0{,}6044.$$

Представим теперь себе ситуацию, что событие Aосуществилось. Это обстоятельство позволяет пересмотреть вероятности исходных гипотез $\{H_1,H_2,...,H_n\}$, т.е. вычислить так называемые *апостериорные* вероятности гипотез (в отличие от *априорных* вероятностей, которые получаются до реализации какого-либо события). Речь идет об условных вероятностях $P(H_1|A), P(H_2|A),\ldots,P(H_n|A)$.

Теорема 37 (формула Байеса). Для любого $k=1,2,\ldots,n$ справедлива формула:

$$P(H_k|A)=\frac{P(A|H_k)\cdot P(H_k)}{\sum\limits_{i=1}^{n}P(A|H_i)\cdot P(H_i)}. \qquad (71)$$

■

Пример 103 (продолжение примера 101). Пусть в условиях примеров 100 и 101 осуществилось событие B(т.е. во второй раз из урны вынули красный шар). Какова вероятность того, что первым был вынут также красный шар?

Так как $A=H_1$, то нам нужно вычислить условную вероятность $P(H_1|B)$. По формуле Байеса (71) имеем:

$$P(H_1|B)=\frac{P(B|H_1)\cdot P(H_1)}{P(B)}=\frac{0{,}5\cdot 0{,}6}{0{,}6}=0{,}5.$$

В рассмотренном примере условные вероятности $P(H_1|B)$ и $P(B|H_1)$ оказались равными. Это получилось совершенно случайно и не отражает никакой закономерности.

Пример104 (продолжение примера 102). Пусть в условиях примера 102 цель разрушена (совершилось событие A). Какова вероятность того, что при этом в цель было два попадания?

Очевидно, наша задача – вычислить условную вероятность $P(H_2|A)$. Имеем по формуле (71):

$$P(H_2|A) = \frac{P(A|H_2)\cdot P(H_2)}{P(A)} = \frac{0{,}7\cdot 0{,}468}{0{,}6044} \approx 0{,}542\,.$$

Лекция 18

Схема Бернулли.Случайные величины на различных вероятностных пространствах

Схема Бернулли

С понятием «независимых событий» связано понятие «независимых испытаний (опытов)». Несколько опытов называются *независимыми*, если их исходы представляют собой независимые в совокупности события. Другими словами, если проводится несколько испытаний, т.е. опыт выполняется при данном комплексе условий многократно, причём вероятность наступления некоторого события Aв каждом испытании не зависит от исходов других испытаний, то такие испытания называются *независимыми*.

Примерами независимых испытаний могут служить: несколько (nраз) подбрасываний монеты; стрельба nраз по мишени без поправок на ранее допущенную ошибку при новом выстреле и т.д.

Последовательность nнезависимых испытаний, в каждом из которых может произойти некоторое событие A(его называют *успехом*) с вероятностью $P(A) = p$ или противоположное ему событие $\overline{A}$ (его называют *неудачей*) с вероятностью $P(\overline{A}) = q = 1 - p$, называется *схемой независимых испытаний Бернулли*.

Простейшая задача, относящаяся к схеме Бернулли, состоит в определении вероятности того, что в n независимых испытаниях событие A наступит ровно k раз $(0 \le k \le n)$. Вероятность этого события будем обозначать $P_n(k)$. Формулу для её нахождения даёт следующая теорема:

Теорема 38. Если производится n независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события A равна p, а вероятность его непоявления $q = 1 - p$, то вероятность того, что событие A произойдёт k раз определяется *формулой Бернулли*:

$$P_n(k) = C_n^k \, p^k \, q^{n-k}. \tag{72}$$

■

Пример 105. Игральную кость бросают десять раз. Найти вероятность того, что при этом выпали ровно три шестерки.

При каждом бросании будем считать успехом выпадение шестерки, а неудачей – выпадение любого другого числа. Тогда мы будем находиться в рамках схемы Бернулли с $n = 10, m = 3, \ p = \frac{1}{6}, \ q = \frac{5}{6}$. Используя формулу (72), получаем:

$$P(H_3) = C_{10}^3 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 \left(\frac{5}{6}\right)^7 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 5^7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 6^{10}} \approx 0{,}155.$$

Пример 106. Стрелок стреляет по мишени 3 раза. Вероятности попадания при разных выстрелах одинаковы и равны 0,9. Какова вероятность: а) промаха; б) хотя бы одного попадания; в) не менее двух попаданий.

Проводится 3 независимых испытания, т.е. $n = 3$. В качестве события A выступает попадание в мишень, т.е. $p = 0{,}9$. Вероятность промаха (события B) вычисляем по формуле Бернулли при $k = 0$:

$$P(B) = P_3(0) = C_3^0 \, p^0 \, q^3 = 1 \cdot 1 \cdot 0{,}1^3 = 0{,}001.$$

Рассмотрим событие $C-$ произошло хотя бы одно попадание.Найдём его вероятность, учитывая, что противоположное событие – это промах при трёх выстрелах, т.е. $\overline{C}=B.$ Тогда по первому свойству вероятности:

$$P(C)=1-P(\overline{C})=1-P(B)=1-0{,}001=0{,}999.$$

Рассмотрим событие $D-$ произошло не менее двух попаданий. Вероятность этого события равна сумме вероятностей того, что произошли 2 попадания и вероятности того, что произошли 3 попадания:

$$P(D)=P_3(2)+P_3(3)=C_3^2\, p^2\, q^1+C_3^3\, p^3\, q^0=3\cdot 0{,}9^2\cdot 0{,}1^1+1\cdot 0{,}9^3\cdot 0{,}1^0=$$
$$=3\cdot 0{,}81\cdot 0{,}1+0{,}729=0{,}243+0{,}729=0{,}972.$$

Случайные величины на конечных вероятностных пространствах

Одним из важнейших понятий теории вероятностей (наряду со случайным событием и вероятностью) является понятие случайной величины.

Под *случайной величиной* понимают величину, которая в результате опыта принимает то или иное значение, причём неизвестно заранее, какое именно. Дадим ряд более строгих определений.

*Определение 54.****Конечным вероятностным пространством*** называется такое вероятностное пространство $(\Omega,\mathcal{F},P)$ (см. определение 49), у которого пространство элементарных событий Ω состоит из конечного числа элементов, а $\sigma-$алгебра $\mathcal{F}$ представляет собой совокупность ***всех*** подмножеств множества Ω.

■

Большинство примеров, рассмотренных в первой части наших лекций, было реализовано на конечных вероятностных пространствах. Заметим, что классическое вероятностное пространство (см. определение 47) есть частный случай конечного вероятностного пространства.

Определение 55. Пусть дано конечное вероятностное пространство $(\Omega,\mathcal{F},P)$. Числовая функция $X=X(\omega)$, определенная на пространстве элементарных событий Ω, называется ***случайной величиной (с.в.)*** на $(\Omega, \mathcal{F}, P)$

.

■

Для обозначения случайных величин мы, в основном, применяем большие латинские буквы X, Y, Z и т.д.

Пример 107 (продолжение примера 93). Пусть мы находимся в условиях примера 93. Здесь мы имеем классическое вероятностное пространство, у которого $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$, где ω_k – элементарное событие, заключающееся в выпадении числа k $(k = 1,2,...,6)$. Тогда функция $X = X(\omega)$, заданная формулой $X(\omega_k) = k$, $(k = 1,2,...,6)$, является с.в. на данном вероятностном пространстве.

Случайная величина, принимающая конечное или счётное множество значений называется *дискретной*.

Закон распределения случайной величины

в случае конечного или счетного вероятностного пространства

(дискретные с.в.)

Определение 56. Пусть $X = X(\omega)$ – с.в. на конечном вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ и $x_1 < x_2 < ... < x_m$ – всевозможные значения этой с.в. ***Законом распределения*** данной с.в. называется таблица

x_1	x_2	...	x_m
p_1	p_2	...	p_m

, (73)

где нижний ряд состоит из чисел p_k, равных вероятностям принятия случайной величиной $X = X(\omega)$ значений x_k, $p_k = P(\omega \in \Omega : X(\omega) = x_k)$, причем $p_1 + p_2 + ... + p_m = 1$. Аналогично определяется закон распределения с.в., определенной на счетном вероятностном пространстве (см. далее пример 110).

■

Пример 108 (продолжение примера 107). Очевидно, закон распределения случайной величины, определенной в примере 16, имеет вид:

X	1	2	3	4	5	6
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

(74)

Пример 109. С.в. X, равная числу успехов в серии из n независимых испытаний, в силу формулы (72) имеет следующий закон распределения:

X	0	1	2	...	n
P	q^n	npq^{n-1}	$\frac{n(n-1)}{2}\cdot p^2q^{n-2}$	...	p^n

. (75)

Этот закон распределения называется *биномиальным.*

Заметим, что аналогично можно ввести в рассмотрение счётное вероятностное пространство и случайную величину, определённую на нём. Рассмотрим пример такой случайной величины.

Пример 110. На некотором счетном вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ рассмотрим с.в. X, принимающую значения $0,1,2,...m,...$ с вероятностями

$$p_m = P(\omega \in \Omega : X(\omega) = m) = \frac{a^m}{m!} \cdot e^{-a}, \text{ где число } a > 0.$$

Закон распределения с.в. X выражается бесконечной таблицей:

X	0	1	2	...	m	...
P	e^{-a}	$a \cdot e^{-a}$	$\frac{a^2 \cdot e^{-a}}{2}$	...	$\frac{a^m \cdot e^{-a}}{m!}$	...

(76)

Такой закон распределения называется ***пуассоновским*** (с параметром a).

Случайные величины на произвольном вероятностном пространстве

Определение 57. Случайной величиной X на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ называется такая функция $X = X(\omega)$ от элементарного события, что для любых чисел $a < b$ событие $\{\omega \in \Omega : a \le X(\omega) < b\}$ содержится в σ-алгебре $\mathcal{F}$. Такую случайную величину невозможно описать с помощью табличного закона распределения: для её описания используют функцию из определения 58.

■

Определение 58. ***Функцией распределения*** случайной величины $X = X(\omega)$ называется функция $y = F(x)$ с областью определения R, задающаяся формулой:

$$F(x) = P(X < x) = P\{\omega \in \Omega : X(\omega) < x\}. \tag{77}$$

■

Теорема 39. Пусть $X = X(\omega)$ – с.в. на $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Тогда справедливы формулы:

$P(a \le X < b) = F(b) - F(a)$, $\qquad$ $P(X = a) = F(a+0) - F(a)$.

■

Непрерывные случайные величины

Определение 59. Случайную величину X, определенную на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, будем называть ***абсолютно непрерывной***, если ее функцию распределения $F(x)$ можно представить в виде:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(t)dt, \tag{78}$$

где $p(x) \ge 0$ – некоторая функция на числовой прямой, называемая ***плотностью распределения*** с.в. X.

Из (78) следует формула, выражающая плотность распределения $p(x)$ через функцию распределения $F(x)$

$$p(x) = F'(x), \tag{79}$$

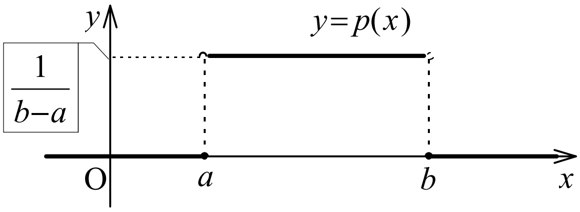
а также свойство нормировки:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = 1. \tag{80}$$

■

Рассмотрим два важных примера распределений, использующихся на практике.

Пример 111(***равномерное распределение*** на отрезке). Рассмотрим функцию:

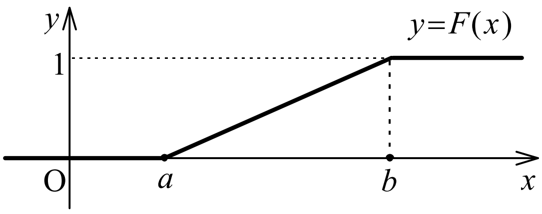


$$y = p(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & a < x < b, \\ 0, & x \le a\ , x \ge b, \end{cases}$$

график которой представлен на рис. 14.

Рис. 14

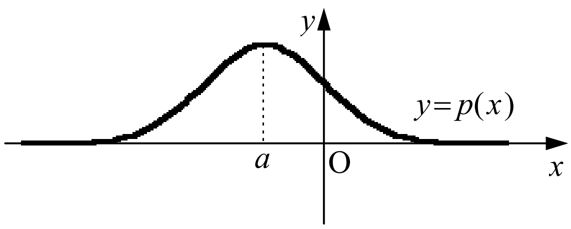
Распределение с.в., имеющей плотность $p(x)$, называется ***равномерным распределением*** на отрезке $[a,b]$. Соответствующая функция распределения имеет вид (рис. 15):



$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le a, \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a < x \le b, \\ 1, & x > b, \end{cases}$$

Рис. 15

Пример 112 (***нормальное распределение***). Рассмотрим функцию



$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{\sigma}\varphi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right),$$

($a \in R,\ \sigma > 0$), график которой представлен на рис. 16.

Рис. 16

Этот график симметричен относительно прямой $x=a$ и имеет в точке $x=a$ единственный экстремум (максимум), равный $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma}$. С.в., имеющая плотность $p(x)$, называется ***нормально распределеннной с.в.*** с параметрами a и σ.

Числовые характеристики случайных величин (табл. 4)

Таблица

Дискретная конечнозначная с.в.	Абсолютно-непрерывная с.в.
Описание случайной величины	
Закон распределения (73)	Плотность вероятности , функция распределения (78), (79), (80)
Математическое ожидание	
$MX = x_1 p_1 + x_2 p_2 + ... + x_m p_m$	$MX = \int_{-\infty}^{+\infty} x \ p(x) dx$
Дисперсия с.в. X – это математическое ожидание квадрата её отклонения от своего математического ожидания, т.е. $DX = M(X - MX)^2$	
$DX = MX^2 - (MX)^2 = \sum_i x_i^2 p_i - (MX)^2$	$DX = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \ p(x) dx - (MX)^2$
Среднее квадратическое отклонение с.в. X	
$\sigma(X) = \sqrt{DX}$	$\sigma(X) = \sqrt{DX}$

Пример 113 (продолжение примера 111). Вычислим математическое ожидание с.в. X, равномерно распределенной на отрезке $[a,b]$. Применяя формулу, приведённую в табл. 4, имеем:

$$MX = \int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)dx = \int_a^b x \cdot \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \cdot \left. \frac{x^2}{2} \right|_a^b = \frac{b^2 - a^2}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2}.$$

Таким образом, $MX = \dfrac{a+b}{2}$ находится на середине отрезка $[a,b]$.

Вычислим дисперсию с.в. X, равномерно распределенной на отрезке $[a,b]$:

$$M\left(X^2\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot p(x)dx = \int_a^b x^2 \cdot \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \cdot \left. \frac{x^3}{3} \right|_a^b = \frac{b^3 - a^3}{3(b-a)} = \frac{a^2 + ab + b^2}{3};$$

$$DX = M\left(X^2\right) - \left(MX\right)^2 = \frac{a^2 + ab + b^2}{3} - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Среднее квадратическое отклонение: $\sigma(X) = \sqrt{DX} = \dfrac{b-a}{2\sqrt{3}}$.

Пример 114 (продолжение примера 112). Можно показать, что математическое ожидание с.в. X, имеющей нормальное распределение с параметрами a и σ равно параметру a. т.е. $MX = a$; среднее квадратическое отклонение равно параметру σ, т.е. $\sigma(X) = \sigma$. Тогда дисперсия для нормального распределения $DX = \sigma^2$.

РАЗДЕЛ 6. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Лекция 19

Основные понятия

Определение закономерностей, которым подчинены массовые случайные явления, основано на изучении методами теории вероятностей результатов наблюдений, которые будем называтьстатистическими данными. Изучением таких закономерностей занимается математическая статистика. Её задача – создание методов сбора и обработки статистических данных для получения научных и практических выводов.

Пусть необходимо изучить совокупность однородных объектов относительно некоторого качественного или количественного признака, характеризующего эти объекты. Например, если имеется партия автомобилей, то качественным признаком может служить качественность какого-либо автомобильного узла, а количественным – длительность пробега автомобиля до первой поломки.

Для исследования качественных и количественных признаков иногда проводят сплошное обследование: обследуют каждый из объектов совокупности относительно признака, который интересует. Но в некоторых случаях (как в нашем примере с автомобилями) проводить сплошное обследование не имеет смысла, а иногда это связано с большими материальными затратами. В таких случаях случайно отбирают из всей совокупности ограниченное число объектов и их изучают.

*Определение 60.**Выборочной совокупностью*** или просто ***выборкой***называют совокупность случайно отобранных объектов.

■

*Определение 61.**Генеральной совокупностью*** называют совокупность объектов, из которых производится выборка (в более абстрактной ситуации под ***генеральной совокупностью*** понимают возможные результаты всех мыслимых наблюдений, производимых в неизменных условиях над одним объектом).

■

Число объектов (наблюдений) в совокупности, генеральной или выборочной, называют её *объёмом*. Дадим более строгое определение выборочной совокупности.

Генеральная совокупность – это случайная величина $X(\omega)$, заданная на пространстве элементарных исходов Ω, с выделенным в нём классом подмножеств событий $\mathcal{F}$, для которых указаны их вероятности, т.е. говорим онекотором вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ и $X(\omega): \Omega \to R$.Например, контролируем размеры производимой на заводе детали или делаем опрос общественного мнения. Таким образом, об объекте исследования можно мыслить как о некоторойс.в. X.

*Определение62.**Выборкой*** объема n, измеряющего с.в. X, называется набор случайных величин $X_1, X_2, ..., X_n$, удовлетворяющих следующим условиям:

1) с.в. $X_1, X_2, ..., X_n$ независимы в совокупности;

2) $P(X_k < x) = P(X < x)$, $\forall x \in R$, $\forall k = 1,2,...,n$.

Это равенство означает совпадение функций распределения с.в. X_k и X.

■

*Определение 63.**Реализацией выборки*** называют конкретные значения $x_1, x_2, ..., x_n$ выборки, полученные в результате наблюдений (испытаний).

■

При составлении выборки после того, как объект отобран и над ним произведено наблюдение, он может быть возвращен в генеральную совокупность или не возвращен. В связи с этим различают повторные и бесповторные выборки.

Определение 64. ***Повторной*** называется выборка, при которой отобранный объект возвращается в генеральную совокупность перед извлечением следующего объекта.

■

Определение 65. ***Бесповторной*** называется выборка, при которой отобранный объект не возвращается в генеральную совокупность.

■

Для получения хороших оценок характеристик генеральной совокупности необходимо, чтобы выборка была ***репрезентативной***, наиболее полно представляла изучаемые признаки генеральной совокупности. Согласно закону больших чисел условием обеспечения репрезентативности выборки является соблюдение случайности отбора: все объекты генеральной совокупности должны иметь равные вероятности попасть в выборку.

Пример 115. Двадцать студентов проходят тестирование по математике. Каждый из них может набрать от 0 до 5 баллов. Пусть X_k – количество баллов, полученное k-м студентом, $k=\overline{1,20}$. Тогда значения $0, 1, 2, 3, 4, 5$ – все возможные количества баллов, набранные одним студентом – образуют генеральную совокупность. Результат тестирования двадцати студентов является выборкой $X_1, X_2, ..., X_{20}$. Реализациями выборки могут быть следующие наборы чисел: $\{0, 1, 5, 3, 4, 2, 3, 1, 4, 4, 3, 5, 5, 2, 1, 0, 1, 1, 2, 4\}$ или $\{3, 1, 1, 0, 4, 5, 3, 5, 4, 5, 3, 2, 5, 1, 1, 4, 2, 3, 5, 0\}$.

Метод статистического исследования, состоящий в том, что на основании изучения выборочной совокупности делается заключение о всей генеральной совокупности, называется ***выборочным***.

Вся совокупность значений с.в. X представляет собой первичный статистический материал, который подлежит дальнейшей обработке, прежде всего упорядочиванию.

Предположим, что мы изучаем некоторуюс.в. X и с этой целью производим ряд независимых наблюдений. Пусть X приняла n_1 раз значение, равное x_1; n_2 раз – значение x_2; n_k раз – значение x_k, при этом $n_1+n_2+...+n_k=n$,где n – объем выборки.

*Определение 66.**Вариантами*** с. в. X называются значения x_k.

■

*Определение 67.**Частотами*** называются числа n_k, которые показывают, сколько раз встречаются значения x_k в ряде наблюдений.

■

*Определение 68.**Относительными частотами*** или ***частостями***называются отношение частот n_k к объему выборки n:

$$w_k = \frac{n_k}{n}. \tag{81}$$

■

Операция расположения значений случайной величины (признака) по неубыванию называется ***ранжированием***статистических данных. Полученная таким образом последовательность $x_{(1)}, x_{(2)},...,x_{(n)}$ значений с.в. X (где $x_{(1)} \le x_{(2)} \le ... \le x_{(n)}$ и $x_{(1)} = \min\limits_{1 \le i \le n} X_i ,..., x_{(n)} = \max\limits_{1 \le i \le n} X_i$) называется ***вариационным рядом.***Вариационный ряд называется ***дискретным***, если любые его варианты отличаются на постоянную величину, и ***интервальным***, если варианты могут отличаться один от другого на сколь угодно малую величину.

Пример 116. (продолжение примера 115). Рассмотрим конкретную реализацию выборки: 0,1,5,3,4,2,3,1,4,4,3,5,5,2,1,0,1,1,2,4. Проранжировав эти значения по неубыванию, получим следующий вариационный ряд: 0,0,1,1,1,1,1,2,2,2,3,3,3,4,4,4,4,5,5,5.

Определение 69. ***Статистическим распределением выборки*** называется ранжированный (упорядоченный) перечень вариантов x_k и соответствующих им частот n_k или относительных частот w_k.

■

Статистическое распределение выборки может быть записано в виде следующих двух таблиц:

x_i	x_1	x_2	...	x_k
n_i	n_1	n_2	...	n_k

(82)

Ясно, что $n_1+n_2+...+n_k=n$, где n – объём выборки.

x_i	x_1	x_2	...	x_k
w_i	w_1	w_2	...	w_k

(83)

В силу (81) получим: $w_1+w_2+...+w_k=\frac{n_1}{n}+\frac{n_2}{n}+...+\frac{n_k}{n}=\frac{n_1+n_2+...+n_k}{n}=\frac{n}{n}=1$.

Пример 117 (продолжение примера 116). Рассмотрим вариационный ряд:

$0,0,1,1,1,1,1,2,2,2,3,3,3,4,4,4,4,5,5,5.$

Вариант $x_1=0$ встречается дважды, т.е. $n_1=2$, вариант $x_2=1$ встречается 5 раз, т.е. $n_2=5$, $x_3=2$— 3 раза, т.е. $n_3=3$, $x_4=3$ тоже встречается 3 раза, т.е. $n_4=3$, вариант $x_5=4$ встречается 4 раза, т.е. $n_5=4$, а вариант $x_6=5$ - 3 раза, т.е. $n_6=3$. Получаем следующее статистическое распределение выборки (n=20):

x_i	0	1	2	3	4	5
n_i	2	5	3	3	4	3

Можно получить и таблицу с относительными частотами:

x_i	0	1	2	3	4	5
w_i	$\frac{2}{20}=0{,}1$	$\frac{5}{20}=0{,}25$	$\frac{3}{20}=0{,}15$	$\frac{3}{20}=0{,}15$	$\frac{4}{20}=0{,}2$	$\frac{3}{20}=0{,}15$

Интервальный вариационный ряд

Если объём выборки значителен и при этом выборка представлена большим количеством вариантов x_i, то для дальнейшей обработки статистических данных удобнее использовать интервальный вариационный ряд.

Для построения интервального ряда необходимо определить величину частичных интервалов, на которые разбивается весь интервал варьирования наблюдаемых значений с.в. X. Длину частичного интервала h нужно выбрать таким образом, чтобы построенный ряд, с одной стороны, не был громоздким, а с другой – позволил выявить характерные черты изменения изучаемой с.в. X .По ***формуле Стерджеса*** оптимальное число интервалов определяется по формуле $m = 1 + 3{,}322 \cdot \lg n$,а длина интервала—

$$h = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{m}, \tag{84}$$

где $x_{\max} - x_{\min}$– разность между наибольшим и наименьшим наблюдаемыми значениями.При этом за начало первого интервала принимается $x_{нач} = x_{\min} - 0{,}5 \cdot h$.

*Пример 118.*В результате трех экзаменов группа из 30 наудачу выбранных абитуриентов набрала следующую сумму баллов: 157, 175, 170, 166, 159, 173, 182, 167, 171, 169, 172, 164, 173, 175, 171, 158, 179, 156, 165, 179, 155, 178, 160, 154, 183, 153, 155, 167, 186, 163. Построить интервальный ряд.

*Решение.*Сначала упорядочим полученные данные по возрастанию:
153, 154, 155, 155, 156, 157, 158, 159, 160, 163, 164, 165, 166, 167, 167, 169, 170, 171, 171, 172, 173, 173, 175, 175, 178, 179, 179, 182, 183, 186.
Ясно, что $x_{\min} = 153$, $x_{\max} = 186$. Найдем число частичных интервалов и длину интервала по формуле Стерджеса: $m = 1 + 3{,}322 \cdot \lg 30 \approx 5{,}91$, $h = \frac{186 - 153}{5{,}91} \approx \frac{33}{5{,}91} \approx 5{,}59$.

Возьмем h=6, тогда $x_{нач}$=153-0,5·6=150.

Разобьем весь ряд на 6 интервалов: [150, 156), [156, 162), [162, 168), [168, 174), [174, 180), [180, 186). Подсчитаем число абитуриентов, попавших в каждый изполученных интервалов, и получим интервальный ряд:

Сумма баллов	[150, 156)	[156, 162)	[162, 168)	[168, 174)	[174, 180)	[180, 186)
Частота	4	5	6	7	5	3
Относит. частота	$4/30$	$5/30$	$6/30$	$7/30$	$5/30$	$3/30$

Лекция20

Геометрическое изображение статистического распределения

Эмпирическая функция распределения

*Определение 70.*Функция

$$\hat{F}_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{k:X_k<x} n_k \tag{85}$$

называется ***эмпирической функцией распределения***, где n – объём выборки, n_k – частота появления варианты x_k ,а $\sum\limits_{k:x_k<x} n_k$ – число выборочных значений $x_1, x_2, ..., x_n$ $< x$.Для нахождения значений эмпирическойфункции удобно её записать в виде: $\hat{F}_n(x) = \dfrac{n_x}{n}$, где n – объём выборки, n_x – число наблюдений, меньших x ($x \in R$).

Более развернутая формула имеет вид::

$$\hat{F}_n(x) = \begin{cases} 0, & x \le x_1, \\ \frac{n_1}{n}, & x_1 < x \le x_2, \\ \frac{n_1+n_2}{n}, & x_2 < x \le x_3, \\ \text{..............................} & \\ \sum\limits_{i=1}^{k-1} \frac{n_i}{n}, & x_{k-1} < x \le x_k, \\ 1, & x > x_k. \end{cases} \tag{86}$$

Значениями $\hat{F}_n(x)$являются так называемые*накопленныечастости*. График эмпирической функции распределения строят так же, как и график функции распределения $F(x)$ дискретной с.в.

■

Пример 119 (продолжение примера 117).Пусть дано статистическое распределение выборки ($n = 20$):

x_i	0	1	2	3	4	5
n_i	2	5	3	3	4	3

Найти и построить эмпирическую функцию $\hat{F}_n(x)$.

Для нахождения эмпирической функции воспользуемся формулой (86):

$$\hat{F}_n(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ \dfrac{2}{20}, & 0 < x \le 1, \\ \dfrac{7}{20}, & 1 < x \le 2, \\ \dfrac{10}{20}, & 2 < x \le 3, \\ \dfrac{13}{20}, & 3 < x \le 4, \\ \dfrac{17}{20}, & 4 < x \le 5 \\ 1, & x > 5. \end{cases}$$

Если вариационный ряд составлен по интервалам значений и вкачестве представителя интервала берется его середина, то эмпирическая функция составляется так же, как по вариационному ряду по значениям. Но в качестве представителя интервала можно брать правый конец интервала. Объединяя отрезками точки, координатами которых являются правые концы интервалов и накопленные частости соответствующих интервалов, получаем ломаную линию, являющуюся довольно хорошим приближением ***графика функции распределения непрерывной случайной величины***. Такой график является точным, если все значения в каждом интервале распределены равномерно. Аналитический вид этой функции довольно сложен.

В отличие от эмпирической функции распределения $\hat{F}_n(x)$ функцию распределения $F(x)$ генеральной совокупности называют ***теоретической*** ***функцией распределения***. Функция $\hat{F}_n(x)$ играет фундаментальнуюроль в математической статистике. Важнейшее её свойство состоит в том,что при увеличении объёма выборки n происходитсближениеэтой функции стеоретической.

Полигон и гистограмма

Наблюдаемые данные, представленные в виде вариационного ряда, можно изобразить графически с помощью полигона и гистограммы. Это позволяет получить наглядное представление о закономерности варьирования наблюдаемых значений с.в. X.

*Определение 71.****Полигоном частот(относительных частот)*** называется ломаная, отрезки которой соединяют точки с координатами (x_1,n_1); (x_2,n_2);…;(x_k,n_k) (с координатами $(x_1,\hat{p}_1)$; $(x_2,\hat{p}_2)$; … ;$(x_k,\hat{p}_k)$).

■

*Определение 72.****Гистограммой частот (относительных частот)*** называется ступенчатая фигура, состоящая из прямоугольников, основаниями которых являются частичные интервалы длиной h, а высоты равны частотам (относительным частотам) соответствующих интервалов.

■

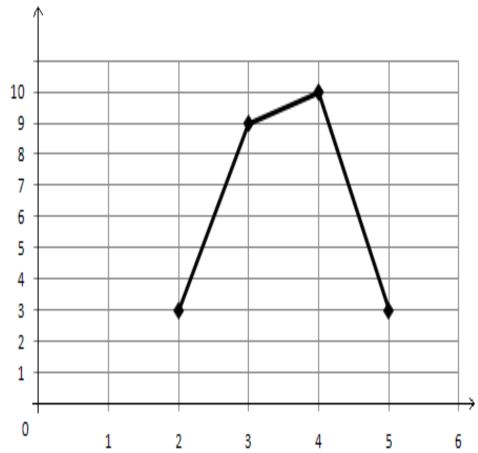
*Пример 120.*Для оценивания знаний студентов-первокурсников проведена контрольная работа по высшей математике. Результаты контроля в выбранной группе из 25 студентов оказались следующими: 3 студента выполнили работу на «5», 10 – на «4», 9 – на «3» и 3 – на «2». Построить полигон частот и эмпирическую функцию распределения.

Решение. Объём выборки *n*=25. Представим исходные данные в виде дискретного вариационного ряда:

x_k	2	3	4	5
k	3	9	10	3

Согласно формуле (86) эмпирическая функция распределенияи полигон частот имеют вид:

$$\hat{F}_n(x) = \begin{cases} 0, & если\ x \le 2; \\ \dfrac{3}{25}, & если\ 2 < x \le 3; \\ \dfrac{12}{25}, & если\ 3 < x \le 4; \\ \dfrac{22}{25}, & если\ 4 < x \le 5; \\ 1, & если\ x > 5. \end{cases}$$



Лекция 21

Точечные оценки параметров распределения

Числовые характеристики статистического распределения

Будем считать, что измеряемая с. в. X имеет неизвестные параметры, которые нам нужно оценить. Например, мы можем знать, что с.в. X имеет нормальное распределение с параметрами a и σ, которые нам неизвестны. Для получения необходимых оценок нам нужно познакомиться с некоторыми числовыми характеристиками статистического распределения.

Определение 73. ***Выборочным средним*** $\overline{X}$ (средним арифметическим) наблюдаемых значений с. в. X называется число, определяемое формулой:

$$\overline{X} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k \, .$$	(87)

■

Если наблюдаемые данные представлены в виде вариационного ряда, где $x_1, x_2, \ldots, x_k$ – варианты значений с.в. X, а $n_1, n_2, \ldots, n_k$ – соответствующие им частоты, то выборочное среднее вычисляется по формуле:

$$\overline{X}=\frac{x_1\cdot n_1+x_2\cdot n_2+...+x_k\cdot n_k}{n}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}x_i\cdot n_i=\sum_{i=1}^{k}x_i\cdot w_i\,. \tag{88}$$

Определение 74. ***Выборочной дисперсией*** $\hat{D}X$ значений с.в. X называется среднее арифметическое квадратов отклонений наблюдаемых значений этой величины от их выборочного среднего:

$$\hat{D}X=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(x_k-\overline{X}\right)^2 \tag{89}$$

■

Аналогично для вариационного ряда выборочная дисперсия определяется формулой:

$$\hat{D}X=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}(x_i-\overline{X})^2\cdot n_k=\sum_{i=1}^{k}(x_i-\overline{X})^2\cdot w_k\,. \tag{90}$$

Интуиция нам подсказывает, что числа $\overline{X}$ и $\hat{D}X$ должны быть приближениями математического ожидания и дисперсии с.в. X. Оказывается, что первая формула – это хорошее приближение математического ожидания с.в. X, а вторая – не очень хорошее приближение дисперсии с.в. X. Поэтому вводится следующая ***исправленная дисперсия***:

$$\hat{S}^2=\frac{n}{n-1}\hat{D}X=\frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}\left(x_k-\overline{X}\right)^2. \tag{91}$$

Данное выражение будет давать хорошее приближение дисперсии с.в. X.

Определение 75. ***Выборочным средним квадратическим отклонением*** $\hat{\sigma}_x$ называется арифметический квадратный корень из выборочной дисперсии:

$$\hat{\sigma}_x=\sqrt{\hat{D}X}\,. \tag{92}$$

■

Для интервального вариационного ряда формулы для выборочных средних будут аналогичны формулам (88)–(92), но за значения $x_1, x_2, ..., x_k$ надо брать не концы промежутков $[x_0, x_1), [x_1, x_2), \ldots, [x_{n-1}, x_n]$, а их середины $\frac{x_0+x_1}{2}, \frac{x_1+x_2}{2}, \ldots$

В качестве описательных характеристик вариационного ряда $x_{(1)}, x_{(2)}, ..., x_{(n)}$ (или полученного из него статистического распределения выборки) используется медиана, мода, размах вариации (выборки) и т.д.

*Определение 76.***Размахом вариации** называется число $R = x_{(n)} - x_{(1)}$, где $x_{(1)} = \min\limits_{1 \le k \le n} x_k$, $x_{(n)} = \max\limits_{1 \le k \le n} x_k$ (или $R = x_{\max} - x_{\min}$, где $x_{\max}$ – наибольший, а $x_{\min}$ – наименьший вариант ряда).

■

*Определение 77.***Модой** M_0 **вариационного ряда** называется вариант, имеющий наибольшую частоту.

■

*Определение 78.***Медианой** M_e **вариационного ряда** называется значение признака (с.в. *X*), приходящееся на середину ряда.

Если $n = 2k$ (т.е. ряд $x_{(1)}, x_{(2)}, ..., x_{(k)}, x_{(k+1)}, .., x_{(2k)}$ имеет чётное число членов), то $M_e = \dfrac{x_{(k)} + x_{(k+1)}}{2}$; если $n = 2k + 1$, то $M_e = x_{(k+1)}$.

Пример 121. Дано статистическое распределение выборки:

x_i	0	1	2	3	4	5
n_i	2	5	3	3	4	3

Найти выборочное среднее, выборочную дисперсию, исправленную выборочную дисперсию, размах вариации, моду, медиану вариационного ряда:

$$\overline{X} = \frac{x_1 \cdot n_1 + x_2 \cdot n_2 + ... + x_k \cdot n_k}{n} = \frac{0 \cdot 2 + 1 \cdot 5 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot 4 + 5 \cdot 3}{20} = \frac{51}{20} = 2{,}55;$$

$$\hat{D}X = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}(x_i - \overline{X})^2 \cdot n_k = \frac{1}{20}\big((0-2{,}55)^2 \cdot 2\big) + (1-2{,}55)^2 \cdot 5 + (2-2{,}55)^2 \cdot 3 +$$

$$+ (3-2{,}55)^2 \cdot 3 + (4-2{,}55)^2 \cdot 4 + (5-2{,}55)^2 \cdot 3) = \frac{1}{20}(13{,}02 + 12{,}05 + 0{,}93 + 0{,}63 +$$

$$+ 8{,}44 + 18{,}03) = \frac{53{,}1}{20} = 2{,}66;$$

$$\hat{S}^2 = \frac{n}{n-1}\hat{D}X = \frac{20}{19}\cdot 2{,}66 = 2{,}8;$$

$$R = 5;M_0 = 1;M_e = \frac{x_{10} + x_{11}}{2} = \frac{2+3}{2} = 2{,}5.$$

Определение 79. Пусть закон распределения с.в. X содержит неизвестный параметр θ. ***Оценкой (статистической оценкой)параметраθ*** называется некоторая функция $\hat{\theta}_n = \hat{\theta}_n(X_1, X_2, ..., X_n)$ от с.в. $X_1, X_2, ..., X_n$, т.е. его приближённое значение, зависящее от данных выбора.

■

Определение 80. Функцию результатов наблюдений (т.е. функцию выборки) называют ***статистикой.***

■

Можно сказать, что оценка $\hat{\theta}_n$ параметра θесть статистика, которая в определённом смысле близка к истинному значению θ.

Оценка $\hat{\theta}_n$— случайная величина, так как является функцией независимых с.в. $X_1, X_2, ..., X_n$. Если произвести другую выборку, то функция примет, вообще говоря, другое значение.

Если число опытов (наблюдений) невелико, то замена неизвестного параметра θего оценкой $\hat{\theta}_n$, например, математического ожидания средним арифметическим, приводит к ошибке,которая в среднем тем больше, чем меньше число опытов.

К оценке любого параметра предъявляется ряд требований, которым она должна удовлетворять, чтобы быть «близкой» к истинному значению параметра, т.е. быть в каком-то смысле «доброкачественной» оценкой. Качество оценки определяют, проверяя, обладает ли она свойствами несмещённости, состоятельности, эффективности.

Определение 81. Оценка $\hat{\theta}_n$ называется ***несмещенной***, если $M\hat{\theta}_n = \theta$.

■

*Определение82.*Оценка $\hat{\theta}_n$ называется ***состоятельной***, если для всякого $\varepsilon > 0$ выполняется $\lim\limits_{n\to\infty} P\left(\left|\hat{\theta}_n - \theta\right| < \varepsilon\right) = 1$.

■

В теории вероятностей в этом случае говорят, что $\hat{\theta}_n \to \theta$ по вероятности.

Определение 83. Оценка $\hat{\theta}_n$ называется ***эффективной***, если для любой другой оценки θ_n' параметра θ выполняется соотношение $D\hat{\theta}_n \le D\theta_n'$.

■

Несмещенность оценки означает, что прибор, которым мы производили измерения, либо способ измерения не содержит системной ошибки. В среднем мы получаем измеряемый параметр θ. Состоятельность ошибки говорит о том, что при увеличении числа измерений наша оценка приближается к измеряемому параметру θ. А эффективность означает, что данная оценка имеет наименьший разброс значений.

Пусть изучается с.в. Xс математическим ожиданием $a = MX$ и дисперсией DX; оба параметра неизвестны.

Статистика, используемая в качестве приближённого значения неизвестного параметра генеральной совокупности (т.е. определяется одним числом), называется её ***точечной оценкой***.

Наиболее распространённые точечные оценки:

1. В качестве ***точечной оценки неизвестного математического ожидания*** генеральной совокупности, т.е. генеральной средней $a = MX$, используют выборочное среднее $\overline{X}$, вычисленное по выборке. Можно доказать, что выборочное среднее является несмещённой и состоятельной оценкой генеральной средней.

2. В качестве ***точечной оценки генеральной дисперсии*** используют выборочную дисперсию $\hat{D}X$ значений с.в. X. Но эта оценка не обладает свойством несмещённости, поэтому её называют смещённой оценкой генеральной дисперсии DX.

3. Для лучшей***точечной оценки генеральной дисперсии*** DX используют исправленную дисперсию $\hat{S}^2$; её называют несмещённой оценкой генеральной дисперсии DX.

Кроме рассмотренных, можноприменять и другие точечные оценки, но для их получения используют специальные методы[1].

Пример 122. Найти несмещенную оценку дисперсии с.в. X на основании данного распределения выборки:

x_i	2	7	9	10
n_i	8	14	10	18

Решение.

Находим выборочную среднюю $\overline{X} = \dfrac{2 \cdot 8 + 7 \cdot 14 + 9 \cdot 10 + 10 \cdot 18}{50} = 7{,}68$.

Для вычисления выборочной дисперсии воспользуемся формулой: $\hat{D}X = \overline{X}^2 - \left(\overline{X}\right)^2$:

$$\overline{X}^2 = \frac{4 \cdot 8 + 49 \cdot 14 + 81 \cdot 10 + 100 \cdot 18}{50} = 66{,}56, \qquad \hat{D}X = 66{,}56 - (7{,}68)^2 = 7{,}58.$$

Находим несмещенную оценку дисперсии («исправленную» выборочную дисперсию): $\hat{S}^2 = \dfrac{n}{n-1}\hat{D}X = \dfrac{50}{49} \cdot 7{,}68 = 7{,}73$.

*Пример 123.*В ходе эксперимента получены данные наблюдений:

x_i	14	15	16	17	18	19	20
n_i	6	10	18	28	20	12	6

Для данной выборки выполнить следующее:

— построить эмпирическую функцию распределения;

— вычислить числовые характеристики выборки (мода, медиана, размах выборки);

— вычислить несмещённую оценку генеральной средней, смещённую и несмещённую оценки генеральной дисперсии.

Решение. Найдем числовые характеристики данной выборки:

1. Минимальное и максимальное значения выборки: $x_{min} = 14,\ x_{max} = 20$.
2. Размах выборки: $R = x_{max} - x_{min} = 20 - 14 = 6$.
3. Мода: $M_0 = x_4 = 17$.
4. Так как вариационный ряд содержит четное число вариант ($n = 100$), то медиана $M_e = \dfrac{x_{50} + x_{51}}{2} = \dfrac{17+17}{2} = 17$.
5. Выборочное среднее (несмещённую оценку генеральной средней):
$$\overline{X} = \frac{14\cdot 6 + 15\cdot 10 + 16\cdot 18 + 17\cdot 28 + 18\cdot 20 + 19\cdot 12 + 20\cdot 6}{100} = 17{,}06.$$
6. Выборочная дисперсия (смещённая оценка генеральной дисперсии):
$$\hat{D}X = \frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{X}\right)^2\cdot n_i;.$$
$$\hat{D}X = ((14-17{,}06)^2\cdot 6 + (15-17{,}06)^2\cdot 10 + (16-17{,}06)^2\cdot 18 + (17-17{,}06)^2\cdot 28 +$$
$$+ (18-17{,}06)^2\cdot 20 + (19-17{,}06)^2\cdot 12 + (20-17{,}06)^2\cdot 6)/100 = 2{,}33.$$
7. Среднее квадратическое отклонение (несмещённая оценка генеральной дисперсии) : $\hat{\sigma}_x = \sqrt{\hat{D}X} = \sqrt{2{,}33} = 1{,}53$.

8. Запишем эмпирическую функцию данного распределения. Для этого найдем относительные частоты $w_i = \dfrac{n_i}{n}$ и результаты оформим в виде таблицы:

x_i	14	15	16	17	18	19	20
w_i	0,06	0,10	0,18	0,28	0,20	0,12	0,06

Тогда эмпирическая функция распределения $\hat{F}_n(x)$ имеет вид:
$$\hat{F}_n(x) = \begin{cases} 0, & x \le 14, \\ 0{,}06, & 14 < x \le 15, \\ 0{,}16, & 15 < x \le 16, \\ 0{,}34, & 16 < x \le 17, \\ 0{,}62, & 17 < x \le 18, \\ 0{,}82, & 18 < x \le 19, \\ 0{,}94, & 19 < x \le 20, \\ 1, & x > 20. \end{cases}$$

Лекция22

Интервальные оценки параметров распределения

Основные определения

Точечные оценки неизвестного параметра θхороши в качестве первоначальных результатов обработки наблюдений. Их недостаток состоит в том, что неизвестна точность $\varepsilon > 0$ оценивания параметра. Поэтому и возникает задача о приближении параметра θ не одним числом, а целым интервалом. Разумеется, чемменьше длина этого интервала, тем точнее оценка параметра. Поэтому, если для оценки $\hat{\theta}_n$ некоторого параметра θ справедливо неравенство $\left|\hat{\theta}_n - \theta\right| < \varepsilon$, то число $\varepsilon > 0$ характеризует **точность оценки**. Но статистические методы позволяют говорить только о том, что это неравенство выполняется с некоторой вероятностью.

Определение 84. ***Надёжностью*** (***доверительной вероятностью***) оценки $\hat{\theta}_n$ параметра θ называется вероятность γ того, что выполняется неравенство $\left|\hat{\theta}_n - \theta\right| < \varepsilon$.

■

Если заменить это неравенство двойным неравенством $\hat{\theta}_n - \varepsilon < \theta < \hat{\theta}_n + \varepsilon$, то получим, что надёжность определяется как

$$P\left(\hat{\theta}_n - \varepsilon < \theta < \hat{\theta}_n + \varepsilon\right) = \gamma. \qquad (93)$$

Определение 85. ***Доверительным*** называется интервал, в который попадает неизвестный параметр с заданной надёжностью γ.

■

Иными словами, доверительный интервал $I_\theta = \left(\hat{\theta}_n - \varepsilon, \hat{\theta}_n + \varepsilon\right)$ покрывает неизвестный параметр θс заданной надёжностью γ. Выбор величины доверительной вероятности зависит от постановки задачи.Чаще всего берутся значения γ=0,9;0,95;0,99;0,997.

Построение доверительных интервалов (д.и.)

нормального распределения

Пусть исследуемая с.в. *X*имеет нормальное распределение с параметрами *a*и *σ*. Значения вариант выборки $X_1, X_2, ..., X_n$ – независимые с.в., каждая из которых также имеет нормальное распределение с параметрами *a*и *σ*. Построим д.и. для параметров этого распределения.

1. Д.и. для математического ожиданияпри известной дисперсии

Рассматривается случай, когда дисперсия$DX=\sigma^2$известна, а в роли неизвестного параметра θ выступает значение $MX=a$. Зададимся надежностью γ и найдём д.и. для математического ожидания. Возьмём оценку $\hat{\theta}_n$ параметра $\theta = a$ равной $\overline{X}$, где с.в. $\overline{X}$ – выборочное среднее. Можно показать, что при $\varepsilon = U_\gamma \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} > 0$выполняется равенство$P\left(\overline{X} - \varepsilon < a < \overline{X} + \varepsilon\right) = \gamma$. Здесь U_γ определяется из равенства $\Phi_0(U_\gamma) = \frac{\gamma}{2}$, n – объём выборки, σ – известное среднее квадратическое отклонение. Тогда мы получаем следующий ***доверительный интервал оценки для математического ожидания.При известной дисперсии***он имеет вид:

$$I_a = \left(\overline{X} - U_\gamma \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \overline{X} + U_\gamma \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right). \tag{94}$$

2. Д.и. для математического ожиданияпринеизвестной дисперсии

Пусть теперь параметрσ нормального закона распределения признака *X* генеральной совокупности *неизвестен*. Укажем по $X_1, X_2, ..., X_n$ оценку $\hat{\theta}_n = \overline{X}$

параметра $\theta = a$ и исправленную дисперсию $\hat{S}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}\left(X_k - \overline{X}\right)^2$, которая является точечной оценкой для дисперсии σ^2. Используя заданную доверительную вероятность γ, можно найти $\varepsilon = \frac{\hat{S} \cdot t_{\gamma, n-1}}{\sqrt{n}} > 0$ такое, чтобы выполнялось равенство

$$P\left(\overline{X} - \varepsilon < a < \overline{X} + \varepsilon\right) = \gamma .$$

Здесь число $t_{\gamma,\, n-1}$ определяется по надёжности γ и объёму выборки nиз таблицы прил. 2.Тогда с вероятностьюγ можно заключить, что выборочное среднее $\overline{X}$ дает значение неизвестного математического ожидания с точностью ε, и мы получаем следующий ***доверительный интервал для оценки математического ожидания при неизвестной дисперсии.***Он имеет вид:

$$I_a = \left(\overline{X} - \frac{\hat{S} \cdot t_{\gamma, n-1}}{\sqrt{n}} ; \overline{X} + \frac{\hat{S} \cdot t_{\gamma, n-1}}{\sqrt{n}} \right). \tag{95}$$

3.Д.и. для неизвестной дисперсии

Пусть с.в. $X \sim N(a,\sigma^2)$, причем неизвестным параметром θ является σ. Вычислим по $X_1, X_2, ..., X_n$ выборочное среднее $\overline{X}$ и точечную оценку $\hat{S}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}\left(X_k - \overline{X}\right)^2$ дисперсии σ^2. В качестве оценки $\hat{\theta}_n$ неизвестного среднего квадратического отклонения возьмем $\hat{S} = \sqrt{\hat{S}^2}$. Используя заданную доверительную вероятность γ, полагаем$\varepsilon = \hat{S} \cdot q_\gamma$, чтобы выполнялось равенство

$$P\left(\hat{S} - \varepsilon < \sigma < \hat{S} + \varepsilon\right) = \gamma .$$

Здесь число q_γ определяется по доверительной вероятности из таблицы прил. 3.

Итак, с вероятностью γ можно утверждать, что мы получаем следующий ***доверительный интервал для оценки среднего квадратическогоотклонения:***

$$I_{\sigma} = \left(\hat{S} - \hat{S} \cdot q_{\gamma}; \hat{S} + \hat{S} \cdot q_{\gamma}\right). \qquad (96)$$

С такой же вероятностью можно утверждать, что интервал

$$I_{\sigma^2} = \left(\left(\hat{S} - \hat{S} \cdot q_{\gamma}\right)^2; \left(\hat{S} + \hat{S} \cdot q_{\gamma}\right)^2\right) \qquad (97)$$

накроет неизвестную дисперсию σ^2.

*Пример 124.*В результате проведенных наблюдений получена выборка, ряд распределения которой имеет вид:

x_i	1	5	7	10	12
n_i	3	6	10	7	4

Считая, что генеральная совокупность имеет нормальное распределение, найти доверительные интервалы для ее математического ожидания и среднего квадратического отклонения с надежностью 0,95.

*Решение.*По данным выборки объема $n = 30$ вычислим выборочное среднее, выборочную дисперсию и среднее квадратическое отклонение:

$$\overline{X} = \frac{1 \cdot 3 + 5 \cdot 6 + 7 \cdot 10 + 10 \cdot 7 + 12 \cdot 4}{30} = 7{,}367, \qquad \overline{X^2} = \frac{1 \cdot 3 + 25 \cdot 6 + 49 \cdot 10 + 100 \cdot 7 + 144 \cdot 4}{30} = 63{,}967,$$

$$\hat{D}X = \overline{X^2} - \left(\overline{X}\right)^2 = 63{,}967 - 7{,}367^2 = 9{,}694, \ \hat{\sigma}_X = \sqrt{\hat{D}X} = \sqrt{9{,}694} = 3{,}114.$$

Построим доверительный интервал для математического ожидания при неизвестном параметре σ. Воспользуемся формулой (15). Для заданных $\gamma = 0{,}95$ и $n = 30$ найдем значение $t_{\gamma,n-1} = 2{,}045$ (см. прил.2).Тогда получим интервал, покрывающий a с надежностью0,95:

$$\left(7{,}367 - \frac{3{,}114 \cdot 2{,}045}{\sqrt{29}}; 7{,}367 + \frac{3{,}114 \cdot 2{,}045}{\sqrt{29}}\right) = \left(7{,}147; \ 7{,}587\right).$$

Для нахождения интервальной оценки σ при заданных $\gamma = 0{,}95$ и $n = 30$ найдем значение $q_{\gamma} = 0{,}28$ (прил.3). Вычислим исправленную дисперсию по формуле: $\hat{S}^2 = \dfrac{n}{n-1}\hat{D}X = \dfrac{30}{29}\cdot 9{,}694 = 10{,}375$. Тогда $\hat{S} = \sqrt{10{,}375} = 3{,}221$, поэтому, подставив в формулу (96) найденные величины, получим доверительный интервал для σ:

$$\big(3{,}221\cdot(1-0{,}28), 3{,}221\cdot(1+0{,}28)\big) = (2{,}319;\ 4{,}123).$$

Пример 125. Генеральная совокупность имеет нормальное распределение, для которого известно значение параметра $\sigma = 1{,}5$. Найти наименьший объем выборки, при котором доверительный интервал длиной $l = 0{,}8$ покрывает параметр a с надежностью 0,95.

*Решение.*Доверительный интервал для математического ожидания при известном параметре σ определяетсяформулой (94):

$\left(\overline{X} - U_\gamma\cdot\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}; \overline{X} + U_\gamma\cdot\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ или $\left(\overline{X}-\varepsilon, \overline{X}+\varepsilon\right)$, где $\varepsilon = U_\gamma\cdot\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$. По условию $l = 0{,}8$, значит, $\varepsilon = {}^{l}\!/_{2} = 0{,}4$. Величину U_γ найдем из уравнения $2\Phi(U_\gamma) = \gamma = 0{,}95 \Rightarrow U_\gamma = 1{,}96$ (прил.1). Тогда

$$\varepsilon = U_\gamma\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 0{,}4 = 1{,}96\cdot\frac{1{,}5}{\sqrt{n}} \Rightarrow n = \left(\frac{1{,}96\cdot 1{,}5}{0{,}4}\right)^2 = 54{,}02.$$

Следовательно, наименьшим объемом выборки будет $n = 55$.

Приложение 1

Таблица значений функции $\Phi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^x e^{-\frac{z^2}{2}}dz$

x	$\Phi(x)$	X	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	X	$\Phi(x)$
0,00	0,0000	0,32	0,1255	0,64	0,2389	0,96	0,3315
0,01	0,0040	0,33	0,1293	0,65	0,2422	0,97	0,3340
0,02	0,0080	0,34	0,1331	0,66	0,2454	0,98	0,3365
0,03	0,0120	0,35	0,1368	0,67	0,2486	0,99	0,3389
0,04	0,0160	0,36	0,1406	0,68	0,2516	1,00	0,3413
0,05	0,0199	0,37	0,1443	0,69	0,2549	1,01	0,3438
0,06	0,0239	0,38	0,1480	0,70	0,2580	1,02	0,3461
0,07	0,0279	0,39	0,1517	0,71	0,2611	1,03	0,3485
0,08	0,0319	0,40	0,1554	0,72	0,2642	1,04	0,3508
0,09	0,0359	0,41	0,1591	0,73	0,2673	1,05	0,3531
0,10	0,0398	0,42	0,1628	0,74	0,2703	1,06	0,3554
0,11	0,0438	0,43	0,1664	0,75	0,2734	1,07	0,3577
0,12	0,0478	0,44	0,1700	0,76	0,2764	1,08	0,3599
0,13	0,0517	0,45	0,1736	0,77	0,2794	1,09	0,3621
0,14	0,0557	0,46	0,1772	0,78	0,2823	1,10	0,3643
0,15	0,0596	0,47	0,1808	0,79	0,2852	1,11	0,3665
0,16	0,0636	0,48	0,1844	0,80	0,2881	1,12	0,3686
0,17	0,0675	0,49	0,1879	0,81	0,2910	1,13	0,3708
0,18	0,0714	0,50	0,1915	0,82	0,2939	1,14	0,3729
0,19	0,0753	0,51	0,1950	0,83	0,2967	1,15	0,3749
0,20	0,0793	0,52	0,1985	0,84	0,2995	1,16	0,3770
0,21	0,0832	0,53	0,2019	0,85	0,3023	1,17	0,3790
0,22	0,0871	0,54	0,2054	0,86	0,3051	1,18	0,3810
0,23	0,0910	0,55	0,2088	0,87	0,3078	1,19	0,3830
0,24	0,0948	0,56	0,2123	0,88	0,3106	1,20	0,3849
0,25	0,0987	0,57	0,2157	0,89	0,3133	1,21	0,3869
0,26	0,1026	0,58	0,2190	0,90	0,3159	1,22	0,3883
0,27	0,1064	0,59	0,2224	0,91	0,3186	1,23	0,3907
0,28	0,1103	0,60	0,2257	0,92	0,3212	1,24	0,3925
0,29	0,1141	0,61	0,2291	0,93	0,3228	1,25	0,3944
0,30	0,1179	0,62	0,2324	0,94	0,3264	1,26	0,3962
0,31	0,1217	0,63	0,2357	0,95	0,3289	1,27	0,3980
1,28	0,3997	1,61	0,4463	1,94	0,4738	2,54	0,4945
1,29	0,4015	1,62	0,4474	1,95	0,4744	2,56	0,4948
1,30	0,4032	1,63	0,4484	1,96	0,4750	2,58	0,4951
1,31	0,4049	1,64	0,4495	1,97	0,4756	2,60	0,4953

Окончание прил 1

1,32	0,4066	1,65	0,4505	1,98	0,4761	2,62	0,4956
1,33	0,4082	1,66	0,4515	1,99	0,4767	2,64	0,4959
1,34	0,4099	1,67	0,4525	2,00	0,4772	2,66	0,4961
1,35	0,4115	1,68	0,4535	2,02	0,4783	2,68	0,4963
1,36	0,4131	1,69	0,4545	2,04	0,4793	2,70	0,4965
1,37	0,4147	1,70	0,4554	2,06	0,4803	2,72	0,4967
1,38	0,4162	1,71	0,4564	2,08	0,4812	2,74	0,4969
1,39	0,4177	1,72	0,4573	2,10	0,4821	2,76	0,4971
1,40	0,4192	1,73	0,4582	2,12	0,4830	2,78	0,4973
1,41	0,4207	1,74	0,4591	2,14	0,4838	2,80	0,4974
1,43	0,4236	1,76	0,4608	2,18	0,4854	2,84	0,4977
1,44	0,4251	1,77	0,4616	2,20	0,4861	2,86	0,4979
1,45	0,4265	1,78	0,4625	2,22	0,4868	2,88	0,4980
1,46	0,4279	1,79	0,4633	2,24	0,4875	2,90	0,4981
1,47	0,4292	1,80	0,4641	2,26	0,4881	2,92	0,4982
1,48	0,4306	1,81	0,4649	2,28	0,4887	2,94	0,4984
1,49	0,4319	1,82	0,4656	2,30	0,4893	2,96	0,4985
1,50	0,4332	1,83	0,4664	2,32	0,4898	2,98	0,4986
1,51	0,4345	1,84	0,4671	2,34	0,4904	3,00	0,49865
1,52	0,4357	1,85	0,4678	2,36	0,4909	3,20	0,49931
1,53	0,4370	1,86	0,4686	2,38	0,4913	3,40	0,49966
1,54	0,4382	1,87	0,4693	2,40	0,4918	3,60	0,49984
1,55	0,4394	1,88	0,4699	2,42	0,4922	3,80	0,49992
1,56	0,4406	1,89	0,4706	2,44	0,4927	4,00	0,49996
1,57	0,4418	1,90	0,4713	2,46	0,4931	4,50	0,49999
1,58	0,4429	1,91	0,4719	2,48	0,4934	5,00	0,49999
1,59	0,4441	1,92	0,4726	2,50	0,4938		
1,60	0,4452	1,93	0,4732	2,52	0,4941		

Приложение 2

Таблица значений $t_\gamma = t(\gamma, n)$

n	γ			*N*	γ		
	0,95	0,99	0,999		0,95	0,99	0,999
5	2,78	4,60	8,61	20	2,093	2,861	3,883
6	2,57	4,03	6,86	25	2,064	2,797	3,745
7	2,45	3,71	5,96	30	2,045	2,756	3,659
8	2,37	3,50	5,41	35	2,032	2,720	3,600
9	2,31	3,36	5,04	40	2,023	2,708	3,558
10	2,26	3,25	4,78	45	2,016	2,692	3,527
11	2,23	3,17	4,59	50	2,009	2,679	3,502
12	2,20	3,11	4,44	60	2,001	2,662	3,464
13	2,18	3,06	4,32	70	1,996	2,649	3,439
14	2,16	3,01	4,22	80	1,991	2,640	3,418
15	2,15	2,98	4,14	90	1,987	2,633	3,403
16	2,13	2,95	4,07	100	1,984	2,627	3,392
17	2,12	2,92	4,02	120	1,980	2,617	3,374
18	2,11	2,90	3,97	∞	1,960	2,576	3,291
19	2,10	2,88	3,92				

Приложение 3

Таблица значений $q_\gamma = q(\gamma, n))$

n	γ			*N*	γ		
	0,95	0,99	0,999		0,95	0,99	0,999
5	1,37	2,67	5,64	20	0,37	0,58	0,88
6	1,09	2,01	3,88	25	0,32	0,49	0,73
7	0,92	1,62	2,98	30	0,28	0,43	0,63
8	0,80	1,38	2,42	35	0,26	0,38	0,56
9	0,71	1,20	2,06	40	0,24	0,35	0,50
10	0,65	1,08	1,80	45	0,22	0,32	0,46
11	0,59	0,98	1,60	50	0,21	0,30	0,43
12	0,55	0,90	1,45	60	0,188	0,269	0,38
13	0,52	0,83	1,33	70	0,174	0,245	0,34
14	0,48	0,78	1,23	80	0,161	0,226	0,31
15	0,46	0,73	1,15	90	0,151	0,211	0,29
16	0,44	0,70	1,07	100	0,143	0,198	0,27
17	0,42	0,66	1,01	150	0,115	0,160	0,211
18	0,40	0,63	0,96	200	0,099	0,136	0,185
19	0,39	0,60	0,92	250	0,089	0,120	0,162

Библиографический список

1. В.Е.Гмурман. Теория вероятностей и математическая статистика. В.Е.Гмурман. М.: Высшее образование, 2008.
2. П.Е. Данко. Высшая математика в упражнениях и задачах (с решениями): учебное пособие для вузов. В 2 ч. Ч.2. П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова. М.: ОНИКС 21 век: Мир и образование, 2008.
3. И.В. Павлов. Курс лекций по математике для строительных специальностей. Часть 1. И.В. Павлов,В.В.Шамраева.[Электронный ресурс]– Ростов н/Д: Рост. гос. строит. ун-т, 2013. – 286 с. http://ntb.donstu.ru/MegaPro/Download/MObject/14544/523_F.pdf
4. И.В. Павлов. Курс лекций по математике для строительных специальностей. Часть 2.И.В. Павлов,В.В.Шамраева.[Электронный ресурс] Ростов н/Д: Рост. гос. строит. ун-т, 2014. –130 с. – http://ntb.donstu.ru/MegaPro/Download/MObject/17057/UMLE6-186_F.pdf
5. И.В. Павлов. Курс лекций по математике для строительных специальностей. Часть 3.И.В. Павлов,В.В.Шамраева.[Электронный ресурс] Ростов н/Д: Рост. гос. строит. ун-т, 2015. –166 с. http://ntb.donstu.ru/MegaPro/Download/MObject/18611/UMLE3-34_F.pdf
6. И.В. Павлов. Математическая статистика. Часть 1. И.В. Павлов, В.В. Шамраева, Е.В. Маринченко. Ростов н/Д: РГСУ, 2011. – 30 с.
7. И.В. Павлов. Математическая статистика. Часть 2.И.В. Павлов, В.В. Шамраева, Е.В. Маринченко. – Ростов н/Д: РГСУ, 2011. – 32 с.
8. Д.Т. Письменный. Конспект лекций по высшей математике. В 2 ч. Ч. 1.Д.Т. Письменный. М.: Айрис-пресс, 2009.
9. В.Д Черненко. Высшая математика в примерах и задачах: учебное пособие для вузов. В 3 т.: Т.2.В.Д Черненко. СПб.: Политехника, 2003. – 477 с.

Содержание

Учебное издание

Павлов Игорь Викторович, **Шамраева** Виктория Викторовна

МАТЕМАТИКА. СБОРНИК УСТАНОВОЧНЫХ ЛЕКЦИЙ ДЛЯ СТУДЕНТОВ ЗАОЧНОЙ ФОРМЫ ОБУЧЕНИЯ

Составители: **Назарько** Ольга Валерьевна
Сайфутдинова Наталья Анатольевна
Неумержицкая Наталья Вячеславовна

Редактор Н.Е. Гладких
Компьютерная обработка:

В печать
Формат 60x84/17.Объём усл. п.л.
Тираж экз. Заказ №. Цена свободная.

Издательский центр ДГТУ
Адрес университета и полиграфического предприятия:
344000, г. Ростов-на-Дону, пл. Гагарина, 1.